Tema 2: Electrostática en medios conductores

2.1 Conductores y aislantes
2.2 Carga por inducción
2.3 Condiciones de borde para el campo y para el potencial
2.4 Campo, densidad de carga y potencial en el interior de un conductor
2.5 Campo eléctrico en la superficie de un conductor
2.6 Energía electrostática de un conjunto de conductores
2.7 Capacidad y condensadores
2.8 Energía almacenada en un condensador
2.9 Fuerzas sobre conductores

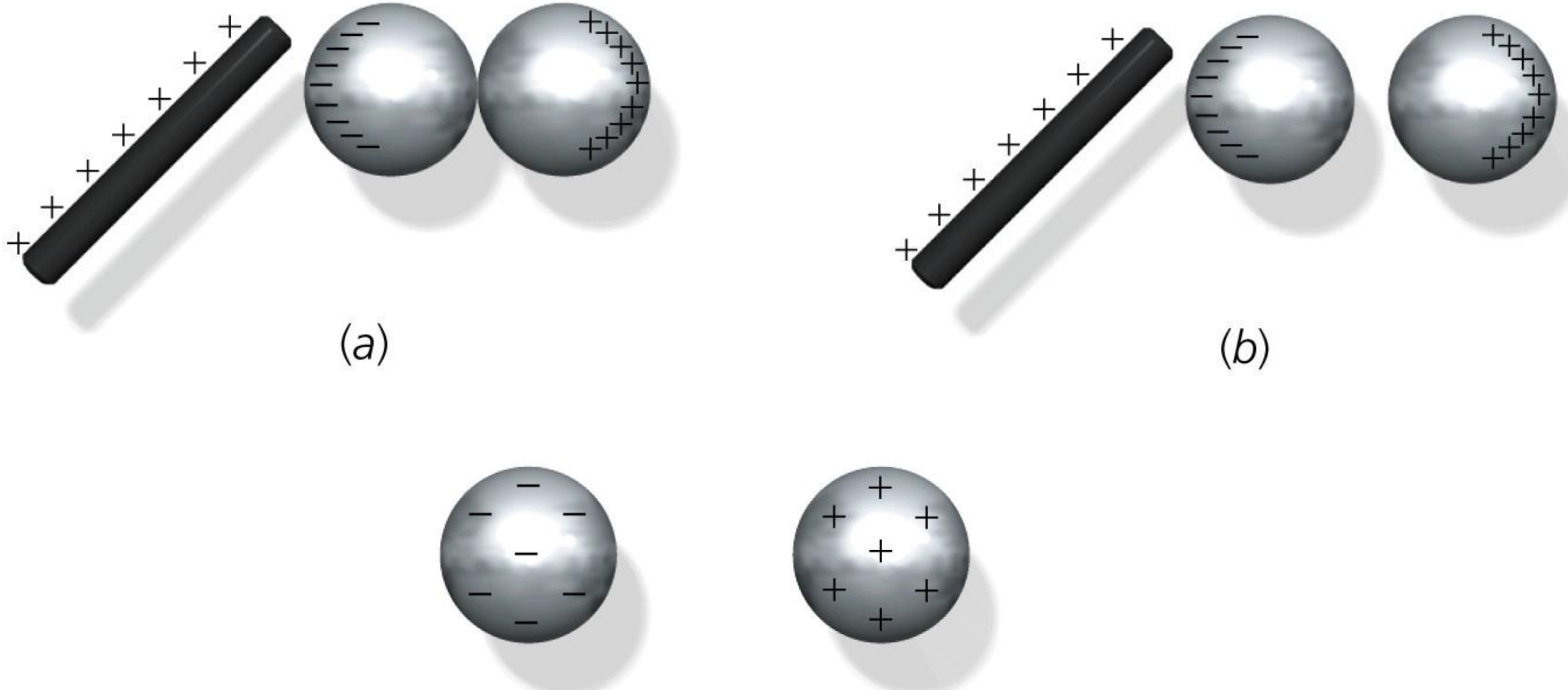
2.1 Conductores y aislantes

- **Conductores**: materiales en los que parte de los electrones se pueden mover libremente en el material (ejemplo: cobre)

- **Aislantes**: materiales en los que todos los electrones están ligados a los átomos y ninguno se puede mover libremente (ejemplo: madera, vidrio)

2.2 Carga por inducción

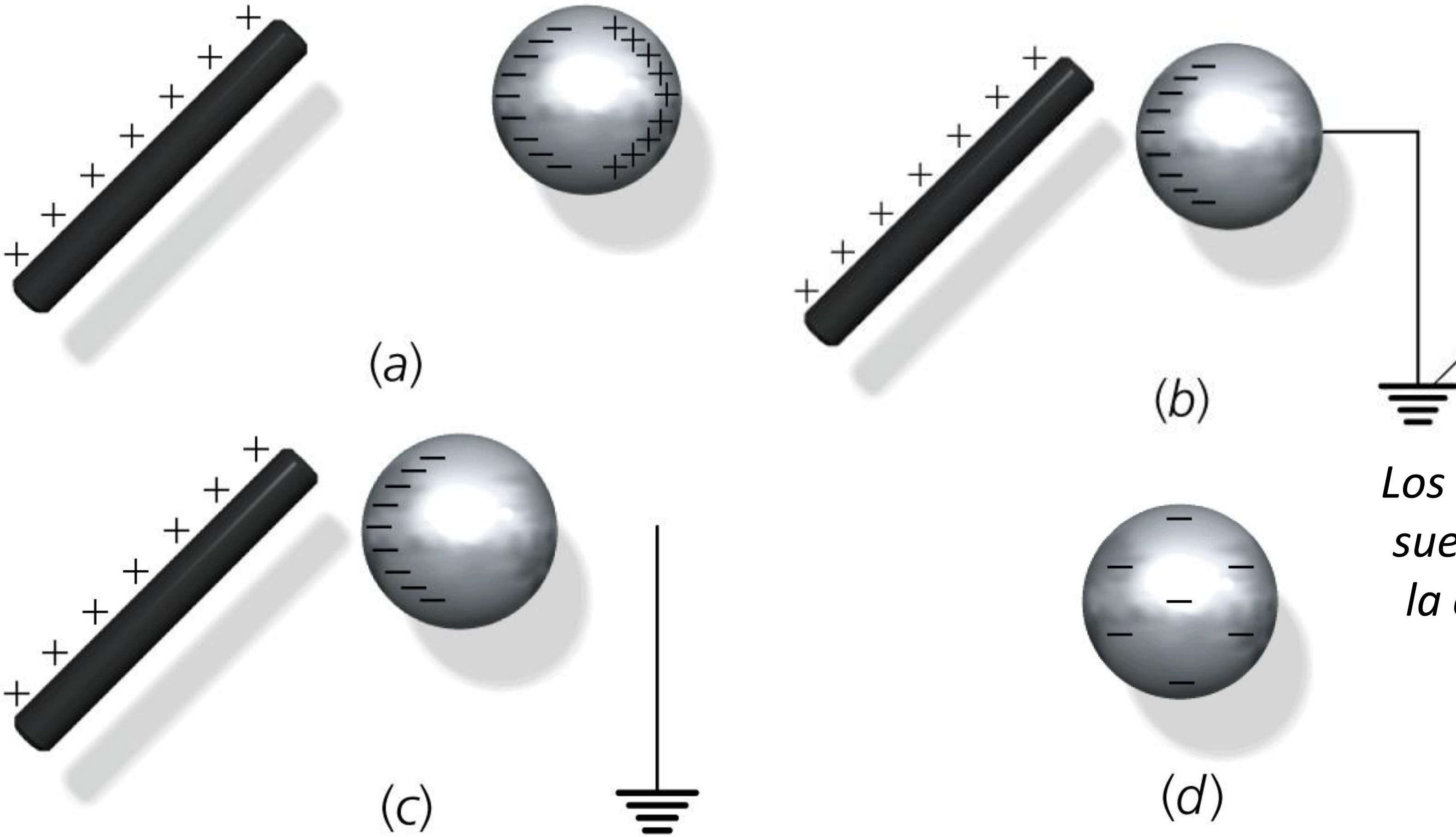
- Ejemplo de conservación de la carga (para materiales conductores)



(a) (b) (c)

Conexión a tierra

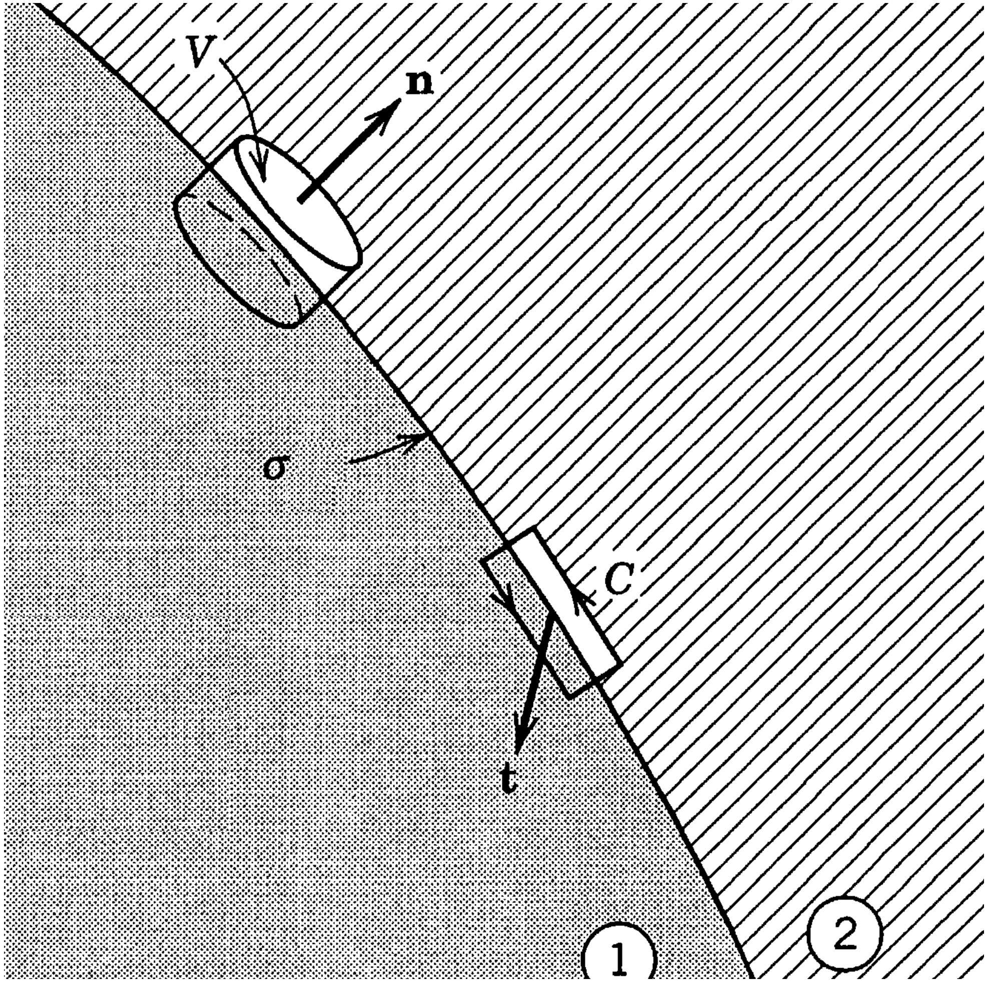
- La Tierra es un conductor con un suministro de carga libre infinito



Símbolo de conexión a tierra

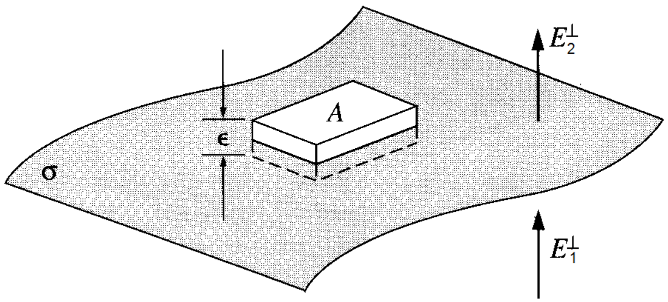
Los electrones del suelo neutralizan la carga positiva

2.3 Condiciones de borde para el campo y para el potencial

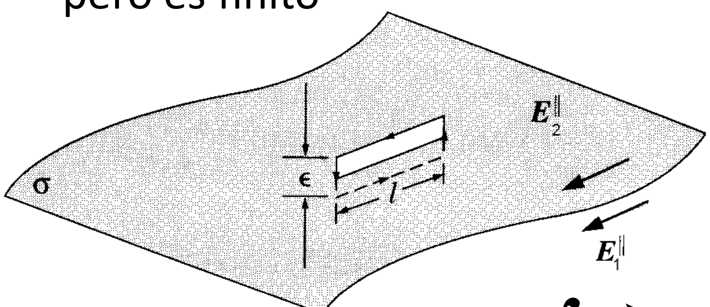


$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^{\perp} + \vec{E}_1^{II}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2^{\perp} + \vec{E}_2^{II}$$



E puede ser discontinuo pero es finito



$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon \to 0 \qquad \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = E_2^{\perp} A - E_1^{\perp} A$$

$$Q_{\text{enc}} = \sigma A \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_2^{\perp} - E_1^{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\varepsilon \to 0 \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_2^{II} l - E_1^{II} l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E}_2^{\parallel} = \vec{E}_1^{\parallel}}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \varepsilon \to 0 \ \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_2 = V_1}$$

2.4 Campo, densidad de carga y potencial en el interior de un conductor

1. *E*=0 en el interior de un conductor perfecto

2. ρ=0 en el interior de un conductor perfecto

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

3. Si el conductor tiene carga neta, tiene que estar en la superficie del conductor

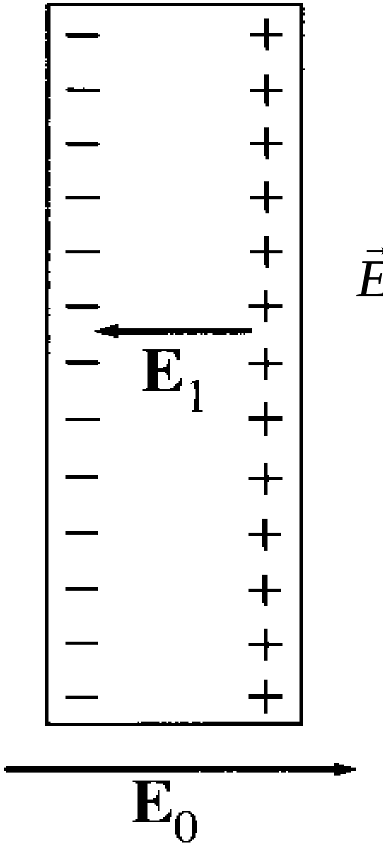
4. La superficie de un conductor es una superficie equipotencial

$$\vec{E}_2^{\parallel} = \vec{E}_1^{\parallel}$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E}_{\text{sup}}^{\parallel} = 0$$

Si *a* y *b* son dos puntos en la superficie del conductor:

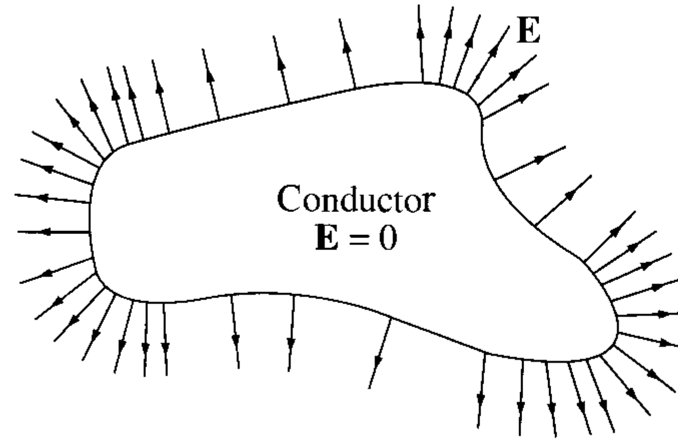
$$V(b) - V(a) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V(b) = V(a)$$



$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_0$$

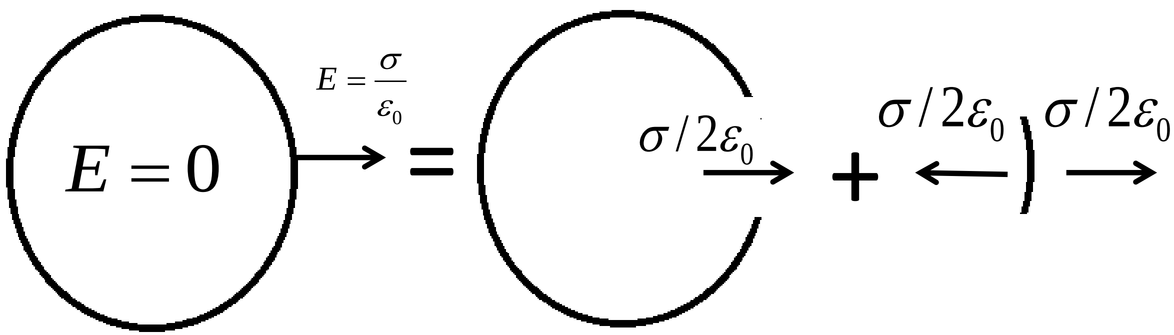
2.5 Campo eléctrico en la superficie de un conductor

5. En el exterior de un conductor perfecto *E* es normal a la superficie



$$E_2^{\perp} - E_1^{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E}_{\text{int}} = 0 \;\Rightarrow\; E_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- Ejemplo: Campo eléctrico en un orificio practicado en una esfera conductora cargada



$$\Rightarrow E_{\text{orificio}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

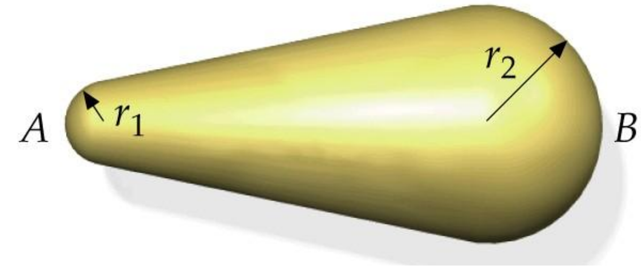
Distribución de carga en un conductor no esférico

- La densidad de carga superficial es máxima en los puntos donde el radio de curvatura es mínimo

$$V = \frac{kq_1}{r_1} = \frac{kq_2}{r_2}$$

$$q_1 = \left(4\pi r_1^2\right)\sigma_1$$

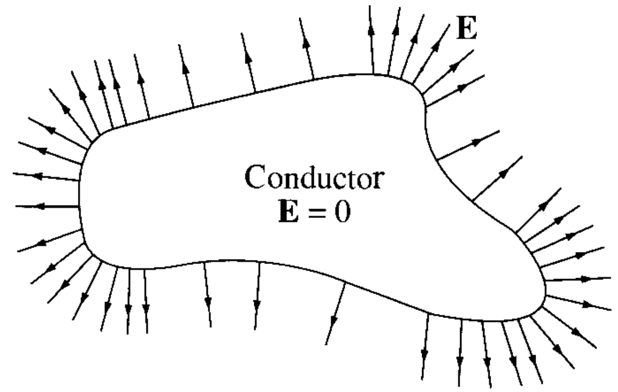
$$q_2 = \left(4\pi r_2^2\right)\sigma_2$$



$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0 V}{r_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{\varepsilon_0 V}{r_2}$$

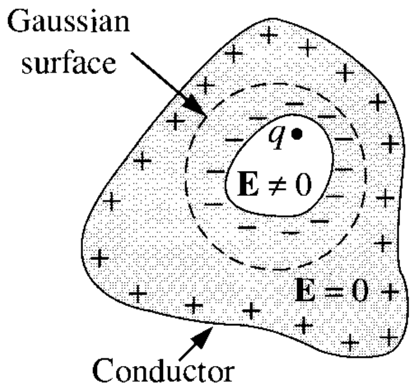
$$r_1 < r_2 \Rightarrow \sigma_1 > \sigma_2$$



Ruptura dieléctrica: la cantidad de carga neta que puede contener un conductor esta limitada por el hecho que, en presencia de un campo eléctrico muy intenso, las moléculas del medio que rodea al conductor se ionizan y el medio se transforma en conductor. Para el aire $E_{max} = 3x10^6$ V/m (**resistencia o rigidez dieléctrica** de un material = intensidad del campo eléctrico para la cual se produce la ruptura dieléctrica del material).

Jaula de Faraday

- El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio es nulo. El conductor “apantalla” los campos externos.
- **Ejemplo**: conductor con una cavidad que contiene una carga *q*

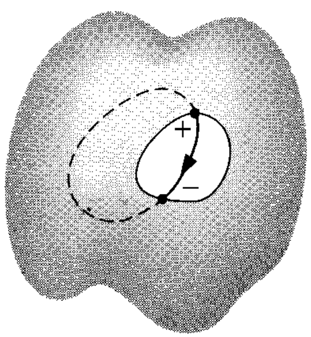


- Se induce una carga igual y opuesta en la superficie de la cavidad
- Si la cavidad no tiene carga, entonces en la superficie no puede haber carga inducida.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \int_{\substack{\text{Linea}\\ \text{punteada}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{\substack{\text{Linea}\\ \text{solida}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

como es en el interior del conductor: $\int_{\substack{\text{Linea}\\ \text{punteada}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

$$\Rightarrow \int_{\substack{\text{Linea}\\ \text{solida}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$



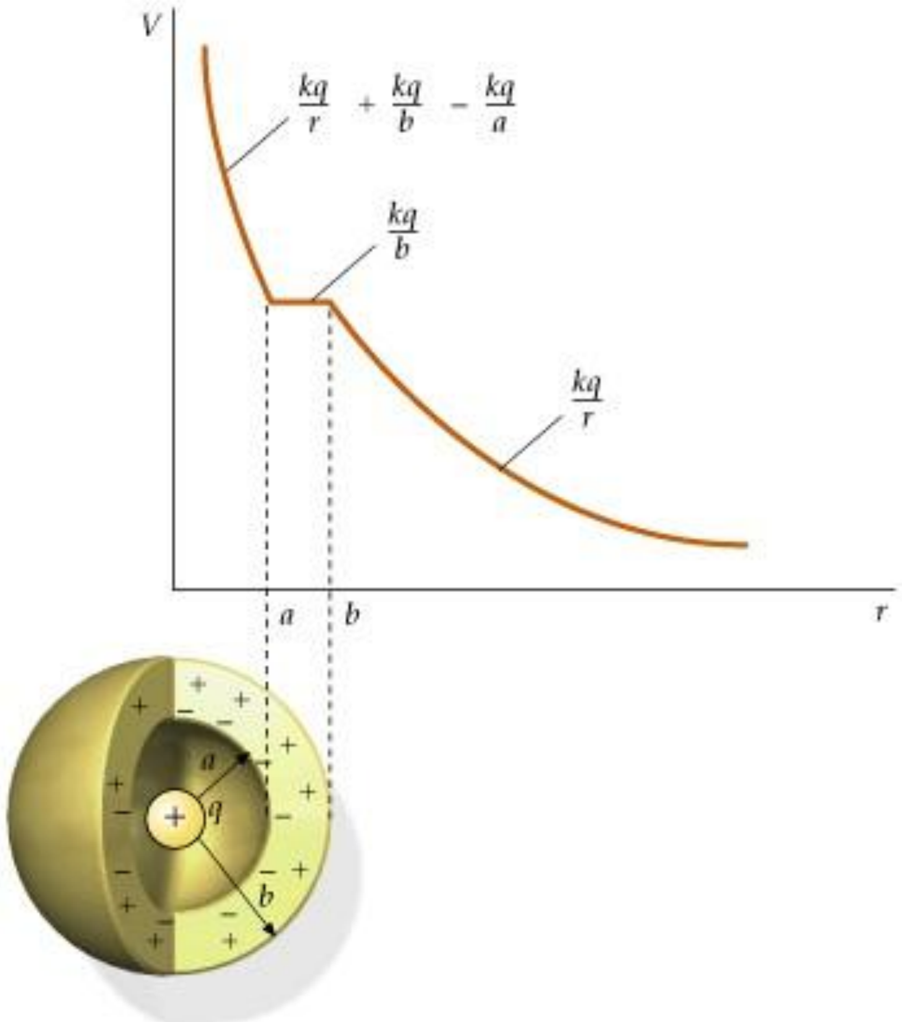
$\Rightarrow$ en la superficie interior no puede haber carga inducida

- Este fenómeno tiene una aplicación importante en aviones o en la protección de equipos electrónicos expuestos a las perturbaciones electromagnéticas causadas por las tormentas eléctricas.

Ejemplo: carga puntual en el interior de un conductor hueco esférico descargado

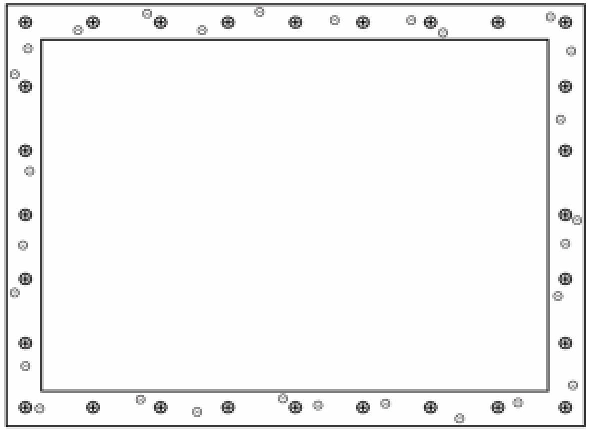
$$q_{\text{int}} = -q$$

$$q_{\text{ext}} = q$$

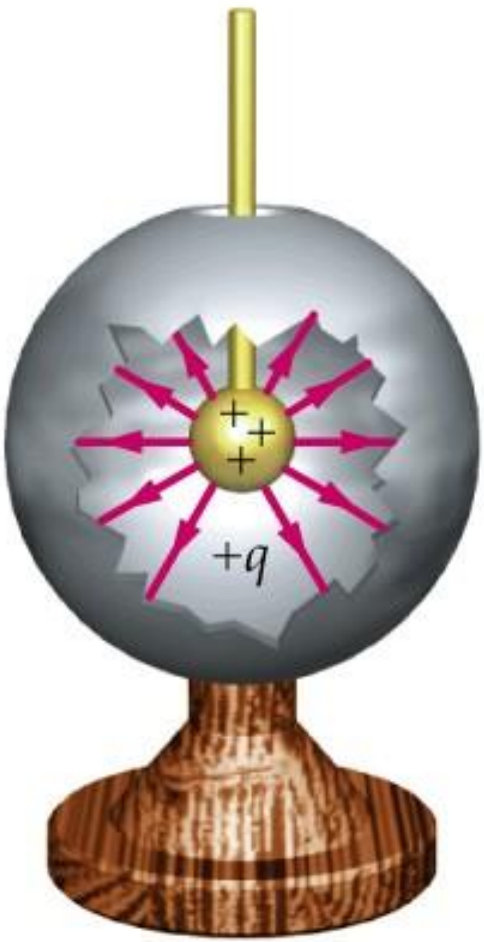


Blindaje electrostático: La Jaula de Faraday

Principio de funcionamiento: el campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo.



Funcionamiento del generador de Van de Graaff



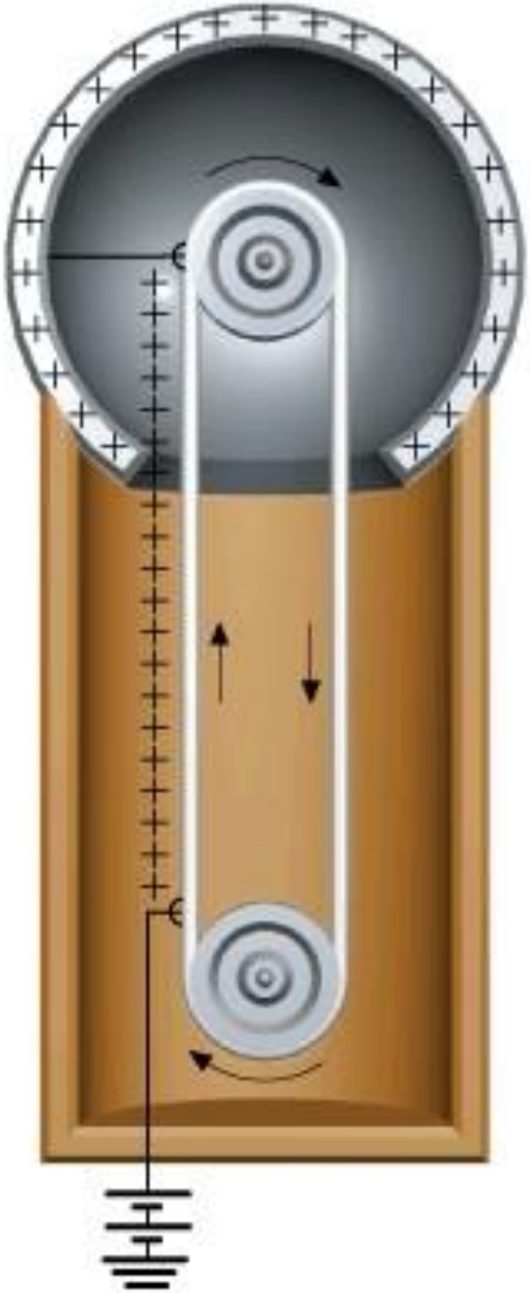
Un conductor pequeño con carga +q se encuentra en un hueco en el interior de un conductor.

En la cara interior del conductor hay una carga –q, y, si el conductor esta descargado, en la superficie exterior del conductor hay una carga +q.

Si la esfera pequeña se pone en contacto con la superficie interior, la carga -q fluye de la superficie interior al conductor pequeño.

Si luego se interrumpe el contacto, el conductor exterior termina con una carga +q en su superficie: la carga del conductor interior es transferida al conductor exterior.

Repitiendo el procedimiento el conductor exterior adquiere carga positiva y se puede generar una gran diferencia de potencial (el potencial de un conductor es proporcional a su carga)

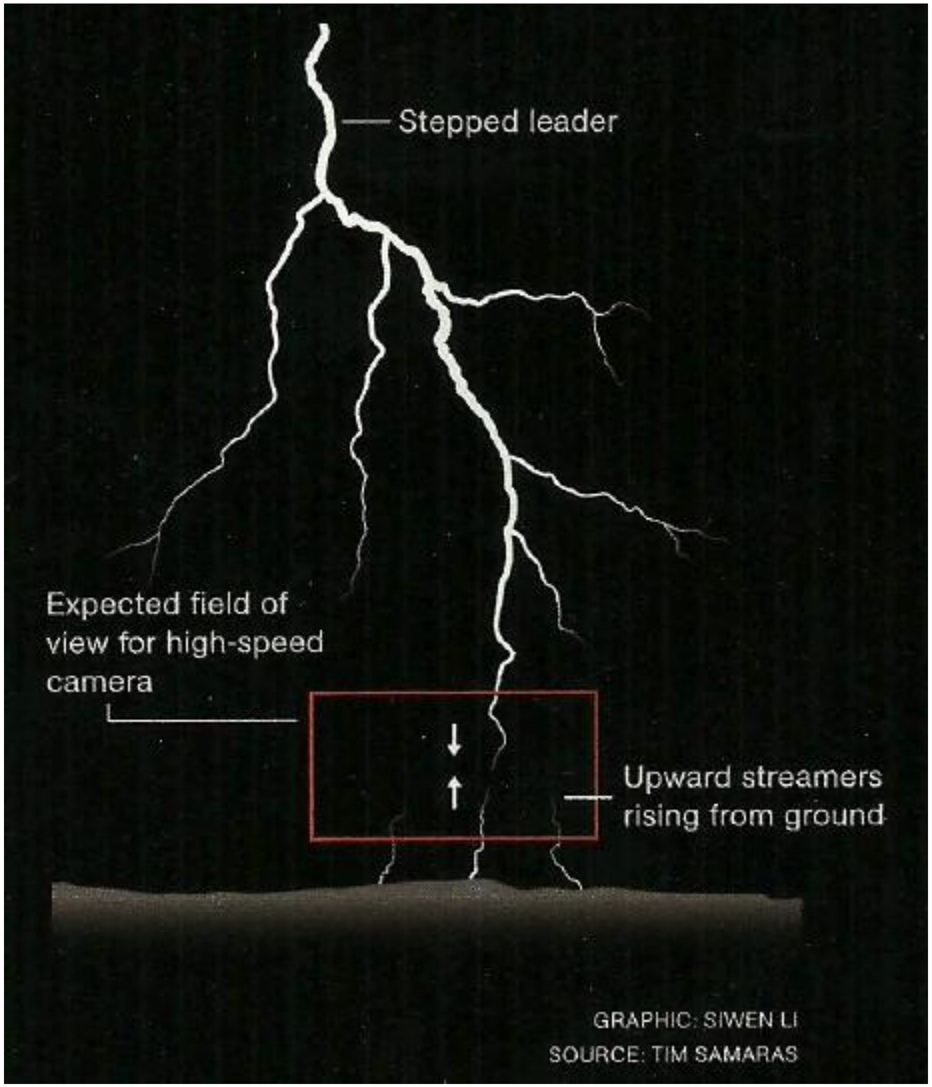


Un conductor metálico hueco está sostenido por soportes aislantes.
Una correa no conductora conectado a tierra se mueve entre dos poleas, accionada mediante un motor eléctrico.
Dos "peines" hechos de hilos conductores muy finos, están situados junto al eje de las poleas. Las puntas de los peines están muy próximas pero no tocan a la cinta.
La rama izquierda de la cinta transportadora se mueve hacia arriba, transporta un flujo continuo de carga positiva hacia el conductor hueco superior (el motor hace trabajo para transportar la carga).
Al llegar al peine superior, hay campo eléctrico lo suficientemente intenso para ionizar el aire situado entre las puntas del "peine" y la cinta, y el aire ionizado proporciona el medio para que la carga pase de la cinta a la punta del peine y a continuación, al conductor hueco.

Uno de los generadores más grandes de Van de Graaff del mundo, construido por el mismo Robert J. Van de Graaff, está ahora en exhibición permanente en el museo de Boston de la ciencia.

Con dos esferas de aluminio conjuntas de 4,5 metros que están estáticas en unas columnas altas, este generador puede alcanzar a menudo **2 millones de Voltios.**

Relámpagos



Cargas negativas descienden desde las nubes a la atmosfera. Cuando estan muy cerca, debido a la diferencia de potencial el aire se ioniza y cargas positivas suben desde la superficie tierra.

Las cargas viajan a velocidad c/3, generando una corriente de 30000 A.

El proceso dura unos 200 ms.


1


2


3


4


5

2.6 Energía electrostática de un conjunto de conductores

$$W = \frac{1}{2}\int dqV = \frac{1}{2}\sum_i \iiint dqV = \frac{1}{2}\sum_i V_i \iint dq = \frac{1}{2}\sum_i V_i Q_i$$

La superficie de cada conductor es una equi-potencial. La carga se encuentra en la superficie

$$U = \frac{1}{2}\sum_i V_i Q_i$$

Energía potencial electrostática de un conjunto de conductores

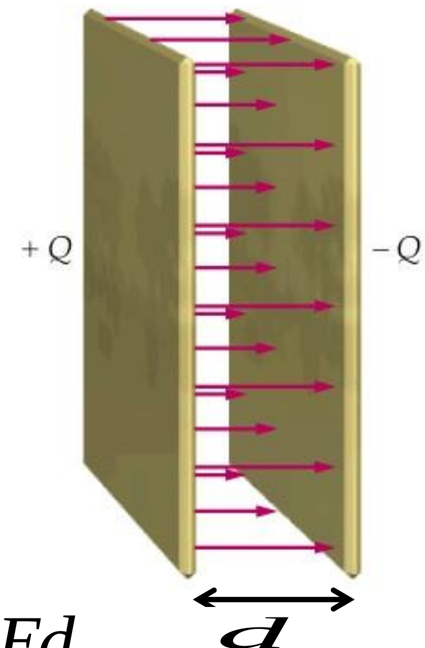
2.7 Capacidad y condensadores

- El potencial de un conductor es proporcional a su carga.
- Para una esfera conductora: $V = kQ/R$
- Un condensador es un dispositivo constituido por dos conductores con cargas iguales y opuestas.

- Capacidad: $C = Q/\Delta V$ (= Q/V)
- Unidad: Faraday = Coulomb/Volt
- Capacidad de una esfera conductora: $C = R/k = 4\pi\varepsilon_0 R$

Ejemplos

Condensador de placas paralelas

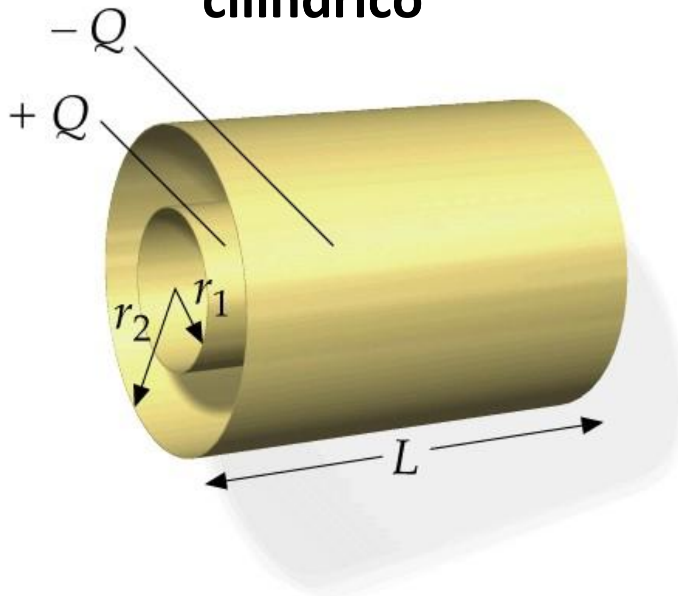


$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = Ed$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \qquad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Condensador cilíndrico



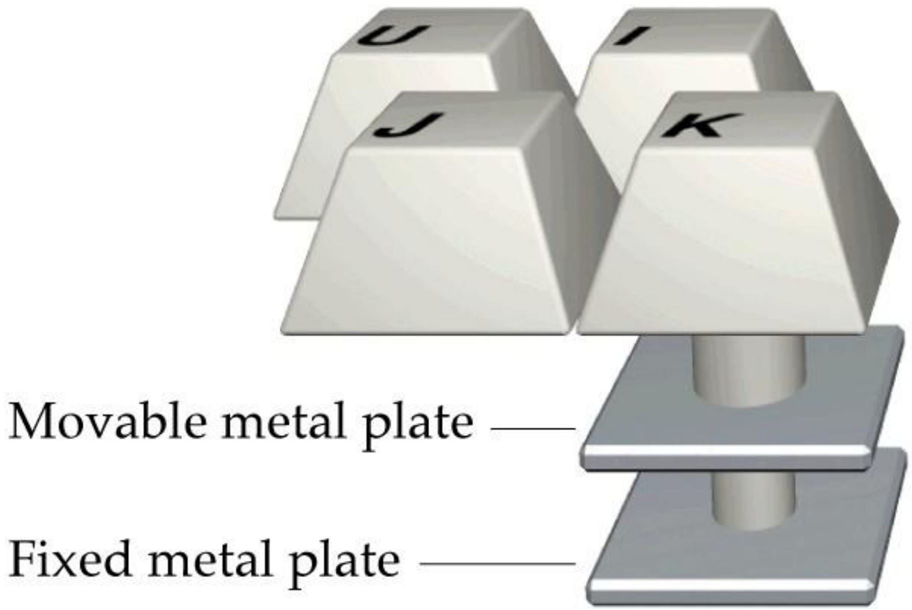
$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(R_2 / R_1)}$$

Esferas concéntricas

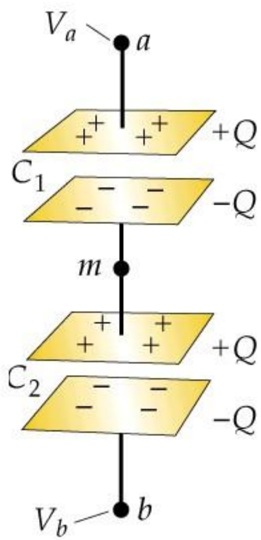
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

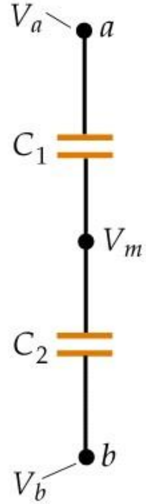
Ejemplo: teclado de un ordenador

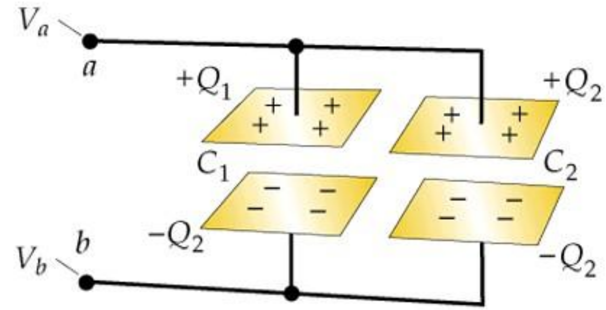
- Al oprimir una tecla, disminuye la distancia entre las dos placas metálicas, lo que aumenta la capacidad, lo que a su vez pone en marcha el circuito electrónico del ordenador.

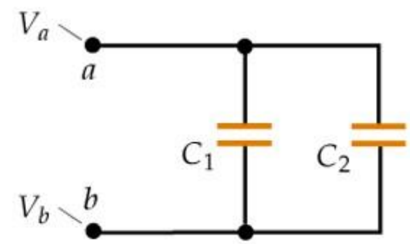


Condensadores en serie y en paralelo









$$\Delta V_1 = Q / C_1$$

$$\Delta V_2 = Q / C_2$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$Q_1 = C_1 \, \Delta V$$

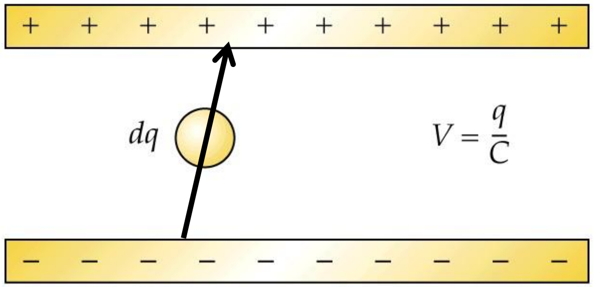
$$Q_2 = C_2 \, \Delta V$$

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V}$$

$$C = C_1 + C_2$$

2.8 Energía almacenada en un condensador

$$W = dq(V_b - V_a) \qquad dU = dq\,\Delta V = dq\frac{q}{C}$$



$$\Rightarrow U = \int_0^Q \frac{q}{C}dq \Rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\,\Delta V = \frac{1}{2}C\,\Delta V^2$$

Ejemplo: esfera conductora de radio *R* con carga *Q*

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{\text{Todo el}\\ \text{espacio}}} |E|^2 dV_{\text{vol}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \int_{\substack{\text{exterior}\\ \text{esfera}}} \int \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0 r^2)^2} r^2 dr \sin\theta d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_R^\infty \Rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

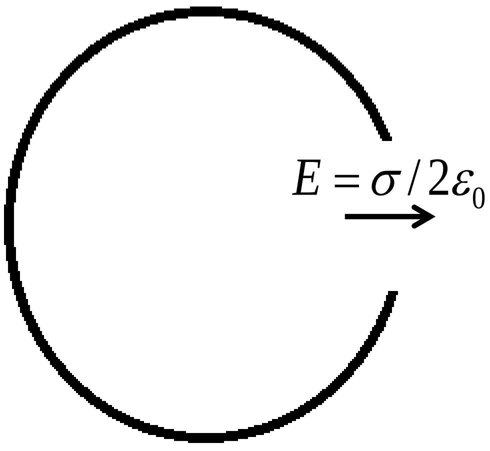
$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Capacidad de una esfera conductora

2.9 Fuerzas sobre conductores

- Hemos visto que el campo eléctrico sobre un elemento de conductor de área d*A*, creado por el resto del conductor es

$$E = \sigma / 2\varepsilon_0$$



- La fuerza ejercida por el resto del conductor sobre un elemento de área es

$$F = dq\, E = (\sigma\, dA) E$$

- La fuerza por unidad de área (*presión electrostática*) es:

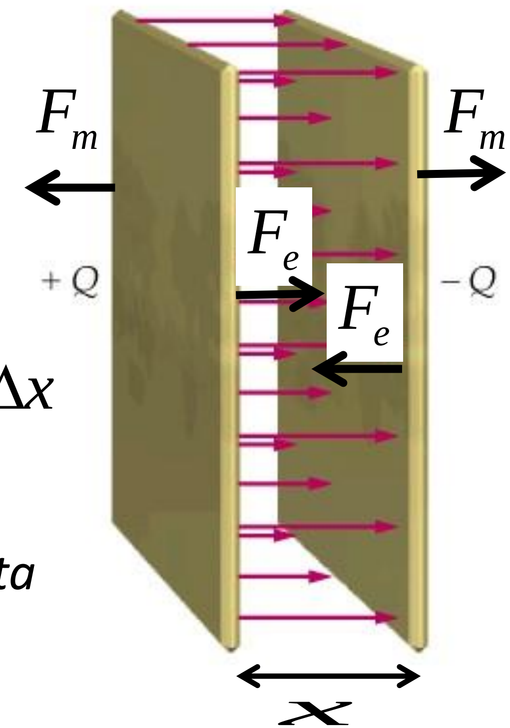
$$f = \frac{F}{A} = \sigma\, E = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

- La fuerza total es: $\vec{F} = \dfrac{1}{2\varepsilon_0} \displaystyle\int_S \sigma^2 \hat{n}\, dS$

Ejemplo: la fuerza eléctrica por unidad de área sobre las placas de un condensador plano

$$f_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad |F_e| = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} A$$

Fuerza eléctrica de atracción entre las dos placas de área A



- Si aumenta la distancia entre las dos placas:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{x} \Rightarrow \Delta C = -\frac{\varepsilon_0 A}{x^2}\Delta x = -\frac{C^2}{\varepsilon_0 A}\Delta x$$

- Variación de energía (*Q* constante):

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow \Delta U = -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 A^2}{C^2}\Delta C = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 A^2}{C^2}\frac{C^2}{\varepsilon_0 A}\Delta x$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 A}{\varepsilon_0}\Delta x = |F_e|\,\Delta x$$

$$|F_m| = |F_e|$$

$$W_{mecanico} = \Delta U$$

si x aumenta, la energía potencial eléctrica aumenta (la fuerza mecánica que mantiene las placas separadas realiza trabajo)