Tema 3: Electrostática en medios dieléctricos

3.1 Dipolo eléctrico

3.2 Polarización y susceptibilidad eléctrica

3.3 Desplazamiento eléctrico y Ley de Gauss en un dieléctrico

3.4 Dieléctricos lineales, isotrópicos y homogéneos

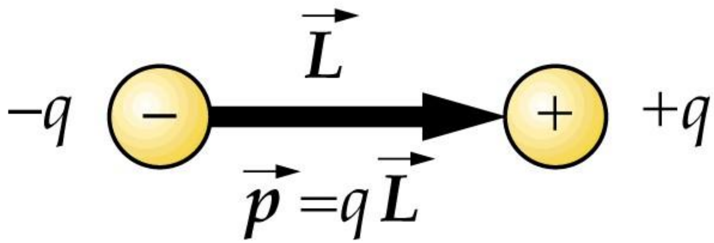
3.5 Condiciones de contorno en medios dieléctricos

3.6 Energía electrostática en un medio dieléctrico

3.7 Dieléctricos no LIH

3.1 Dipolo eléctrico

- Dos cargas iguales y opuestas separadas una distancia *L* (pequeña)
- Momento dipolar eléctrico: $\vec{p} = q\vec{L}$

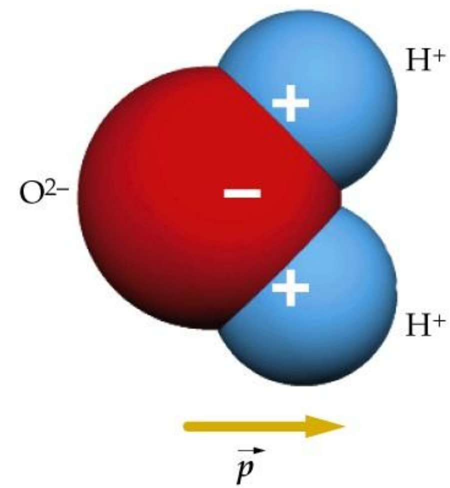


L esta orientado de – a +

- Campo ***creado*** por el dipolo: en el eje del dipolo, en un punto alejado

$$|E| \cong k\frac{2p}{r^3}$$

Ejemplo de dipolo eléctrico: moléculas polares (H_2O)
Moléculas no-polares: no poseen momento dipolar eléctrico permanente

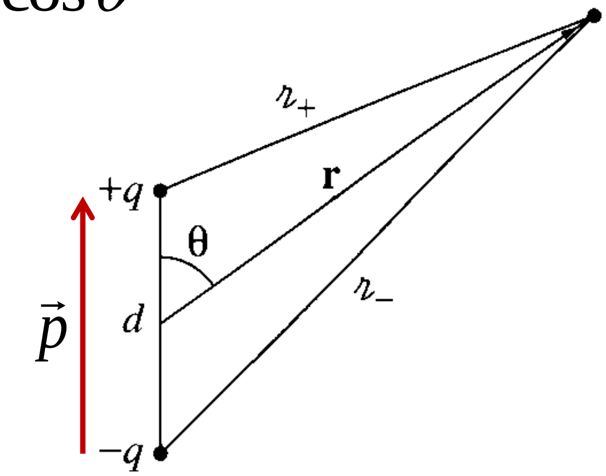


Potencial creado por un dipolo

$$V(r) = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} \qquad r_\pm^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp rd\cos\theta$$

$$r_\pm^2 = r^2\left[1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{r}\left[1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2\right]^{-1/2}$$



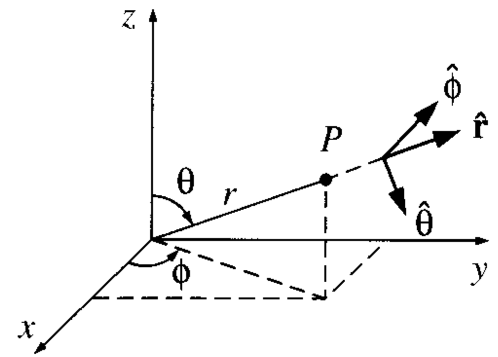
Lejos del dipolo: $\frac{1}{r_\pm} \cong \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$ $\qquad \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \cong \frac{1}{r}\frac{d}{r}\cos\theta$

$$V(r) = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} = \frac{kqd}{r^2}\cos\theta = \frac{k\,p}{r^2}\cos\theta = k\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

Campo creado por un dipolo

$$V(r,\theta) = \frac{k\ p}{r^2}\cos\theta$$

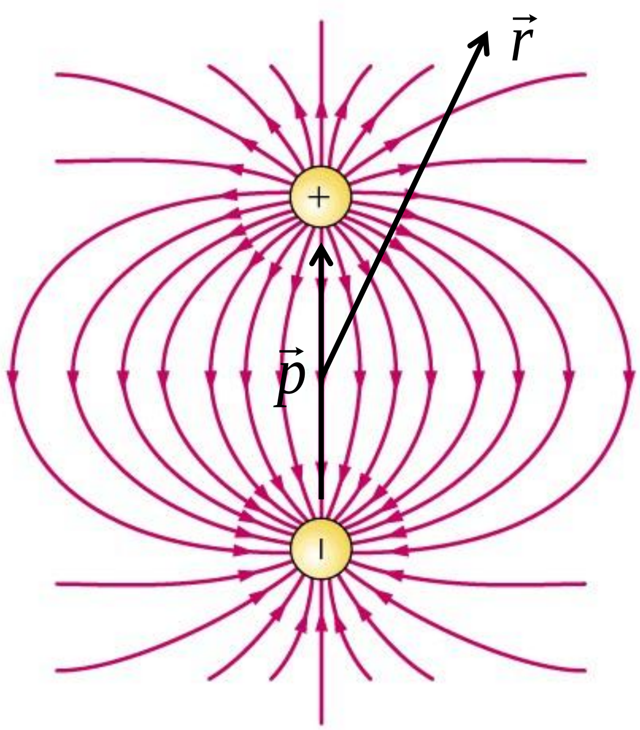
$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$



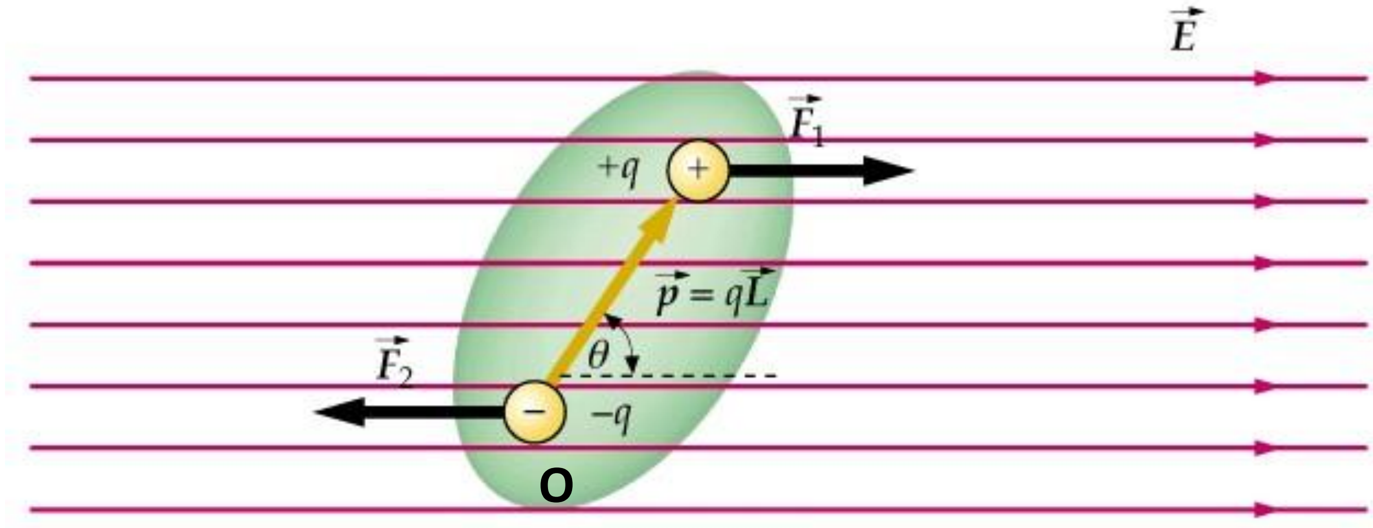
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$



Energía potencial de un dipolo en un campo *externo*



$$\vec{M}_O = \vec{L} \times \vec{F}_1 \quad = \vec{L} \times q\vec{E} = \left(q\vec{L}\right) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$dW = M_O \, d\theta = -pE \sin\theta \, d\theta$$ (*El signo de – es debido a que el momento tiende a disminuir θ*)

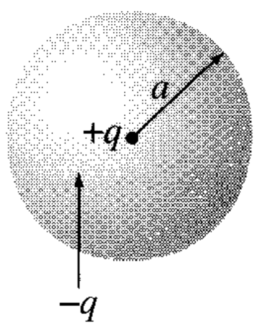
$$dU = -dW \quad \Rightarrow \quad dU = pE \sin\theta \, d\theta$$

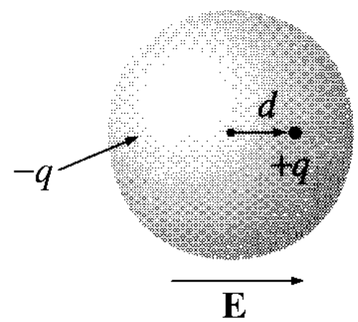
$$\Rightarrow \quad U = -pE\cos\theta + C \quad \Rightarrow \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Energía potencial de un dipolo en un campo externo.

Polarizabilidad atómica

- En un átomo neutro, en presencia de un campo externo se produce un momento dipolar inducido que es proporcional al campo externo.





$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

α=polarizabilidad atómica

<u>Modelo sencillo para calcular la polarizabilidad atómica</u>: Asumimos que el conjunto de electrones de carga –q se puede considerar una esfera de radio "a" con una densidad de carga volumétrica uniforme $\rho = -q/(4\pi a^3/3)$. En el punto donde se encuentra el núcleo (de carga +q) el campo creado por la esfera de electrones es:

$$E_{\text{electrones}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{a^3}$$

Y debe ser igual y opuesto al campo externo: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qd}{a^3} = E$

$$p = qd$$

$$p = \alpha E$$

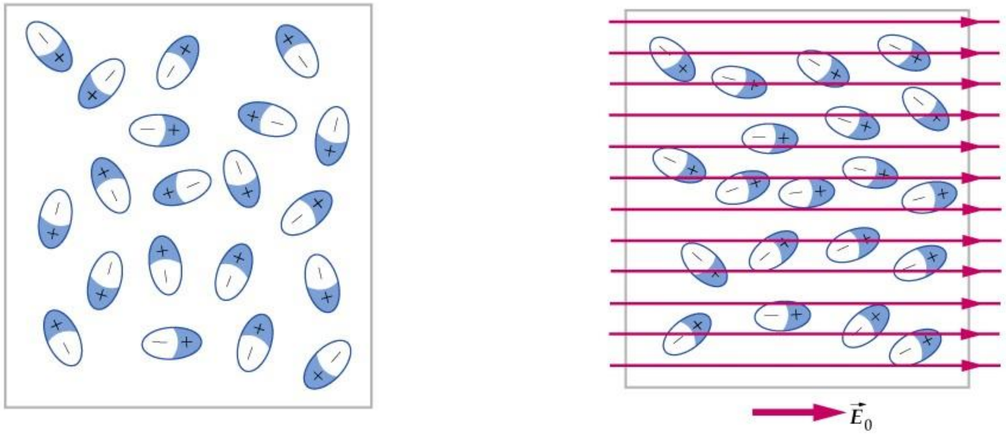
$$\Rightarrow \alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3$$

3.2 Polarización y susceptibilidad eléctrica

- Los materiales dieléctricos están compuestos por un gran conjunto de dipolos eléctricos.
- Se observa experimentalmente que cuando un dieléctrico se introduce entre las placas de un condensador, la capacidad del condensador aumenta en un factor k que depende del material.
- Desarrollaremos una teoría microscópica de los materiales dieléctricos que explica este aumento de capacidad.

Dieléctrico dentro de un condensador

- Cuando un dieléctrico se sitúa en el campo E_0 externo creado por un condensador, las moléculas se polarizan parcialmente tal que se produce un momento dipolar neto paralelo al campo.
- La "respuesta" del material al campo externo depende de las características del material y de la temperatura.



(a) (b)

- Aparece una carga inducida que crea un campo se que opone al campo externo.

$$E = \frac{E_0}{k}$$

$k \geq 1$ es la ***constante dieléctrica*** *del material*

$$\Delta V = Ed = \frac{\Delta V_0}{k} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = k\frac{Q}{\Delta V_0} = kC_0$$

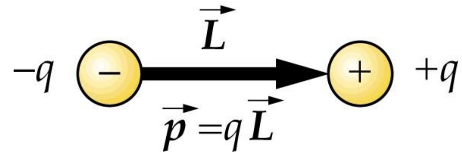
Permitividad y rigidez dieléctrica

- Permitividad del dieléctrico: $\varepsilon = k\varepsilon_0 \quad \Rightarrow C = kC_0 = k\dfrac{\varepsilon_0 A}{d} = \dfrac{\varepsilon A}{d}$
- Si el campo externo es muy intenso, los enlaces moleculares se rompen, el material se ioniza y se transforma en conductor.
- La rigidez (o resistencia) dieléctrica es el valor límite de la intensidad del campo eléctrico para el cual un material es no-conductor.
- Algunos valores típicos:

Material	Constante dieléctrica κ	Resistencia del dieléctrico, kV/mm
Aceite de transformador	2,24	12
Aire	1,00059	3
Baquelita	4,9	24
Gasolina	2,0 (70 °F)	
Mica	5,4	10–100
Neopreno	6,9	12
Papel	3,7	16
Parafina	2,1–2,5	10
Plexiglás	3,4	40
Poliestireno	2,55	24
Porcelana	7	5,7
Titanato de estroncio	240	8
Vidrio (Pyrex)	5,6	14

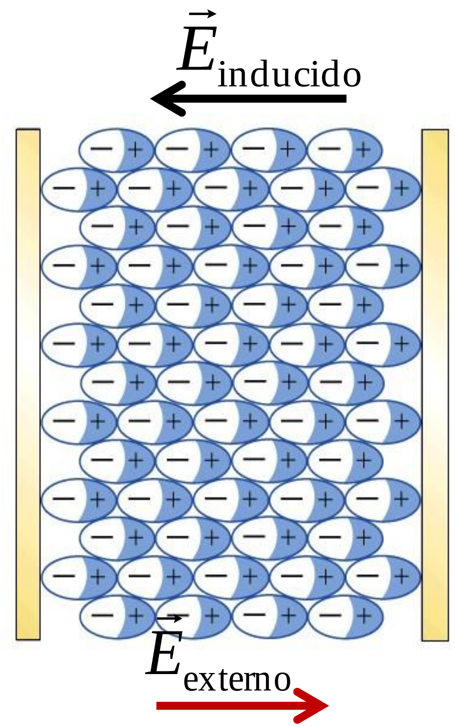
Polarización y susceptibilidad eléctrica

- Momento dipolar de un dipolo:



- Polarización: momento dipolar por unidad de volumen (C/m^2).

$$\vec{P} = \lim_{dV \to 0} \frac{d\vec{p}}{dV}$$



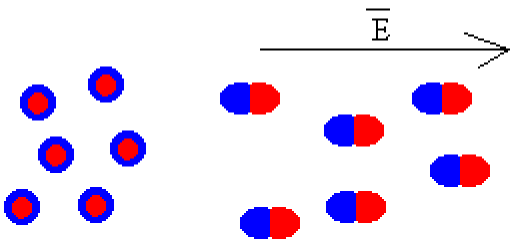
- Una polarización da lugar a una densidad de <u>*carga ligada o inducida*</u>

- Veremos que la carga ligada es la suma de una densidad superficial y densidad volumétrica dadas por

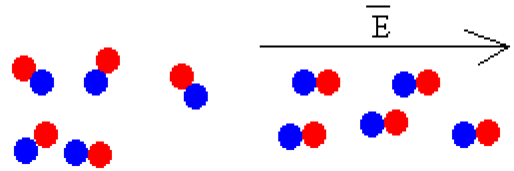
$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \qquad \rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

- Que producen un campo inducido opuesto al campo externo que induce la polarización.

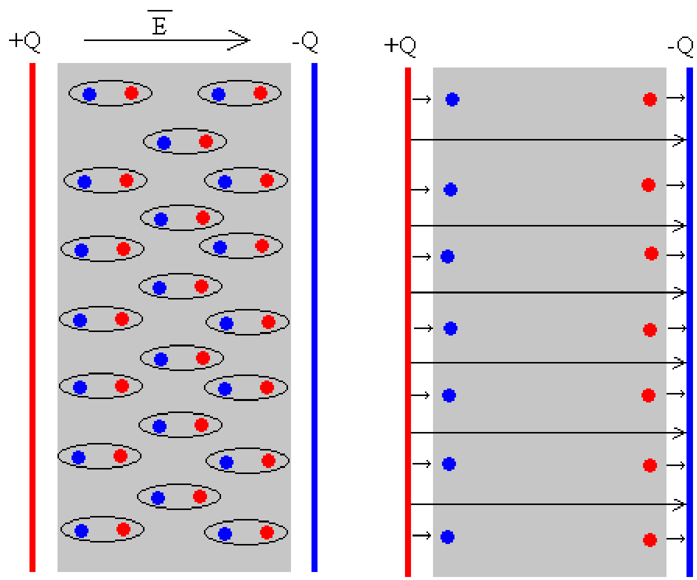
Teoría molecular de las cargas inducidas



Moléculas no polares



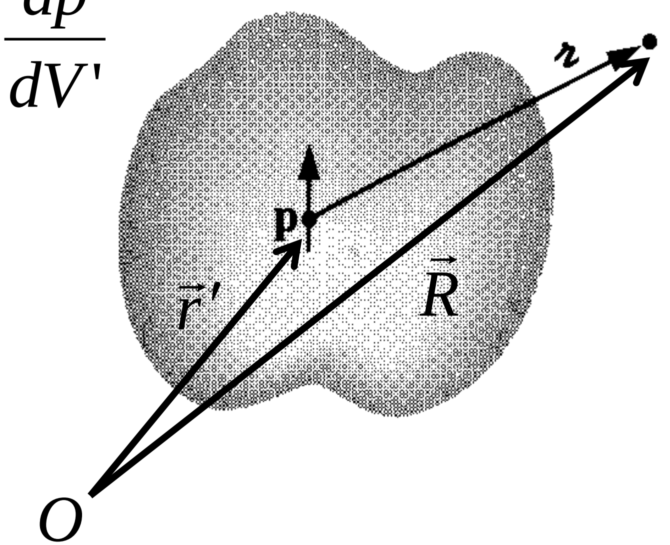
Moléculas polares



Física con Ordenador:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/campo_electrico/dielectrico/dielectrico.htm

Potencial creado por un material polarizado

$$V = \int_V k\,\frac{\vec{r}\cdot d\vec{p}}{r^3} \qquad \vec{r} = \vec{R} - \vec{r}\,' \qquad \vec{P}(r') = \frac{d\vec{p}}{dV'}$$



$$V(R) = k\int_V \frac{\vec{P}(r')\cdot\vec{r}}{r^3}dV'$$

$$\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$V = k\int_V \vec{P}(r')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)dV' \qquad \nabla\cdot\left(f\vec{A}\right) = \nabla f\cdot\vec{A} + f\,\nabla\cdot\vec{A}$$

$$V = k\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\vec{P}(r')}{r}\right)dV' - k\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{P}(r')}{r}dV' = k\oint_S \frac{\vec{P}(r')}{r}\cdot\hat{n}dS - k\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{P}(r')}{r}dV'$$

Potencial y campo creado por un material polarizado

$$V = k\oint_S \frac{\vec{P}(r')\cdot\hat{n}}{r}dS + k\int_V \frac{-\nabla'\cdot\vec{P}(r')}{r}dV'$$

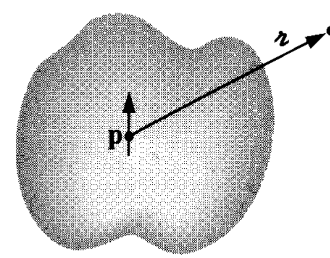
- Si comparamos con el potencial creado por una distribución de carga $\sigma + \rho$

$$V = k\int\frac{dq}{r} = k\oint_S \frac{\sigma\, dS}{r} + k\int_V \frac{\rho\, dV'}{r}$$

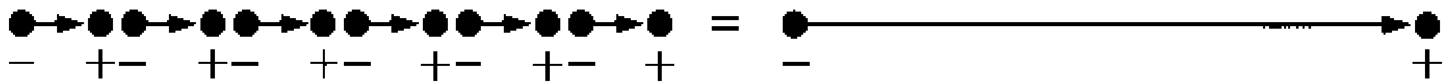
- Las densidades de carga ligadas son: $\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}$ $\qquad \rho_b = -\nabla\cdot\vec{P}$

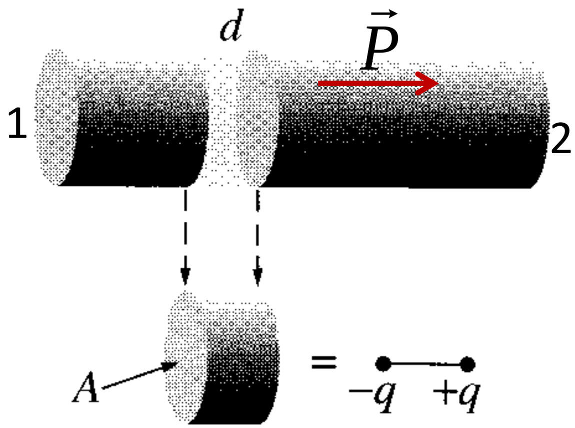
- Para calcular el campo creado por el material polarizado:

$$\vec{E} = k\oint_S \frac{\sigma_b\vec{r}}{r^3}dS + k\int_V \frac{\rho_b\vec{r}}{r^3}dV'$$



Densidad de carga ligada o inducida





Ejemplo: Cilindro con polarización uniforme

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} \sigma_b^1 = -P \\ \sigma_b^2 = P \end{array} \;\Rightarrow\; \vec{E}_{\text{interior}} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_V \rho_b dV = -\int_V \nabla \cdot \vec{P} dV = -\oint_S \vec{P} \cdot \hat{n}\, dS = -\oint_S \sigma_b\, dS$$

$$\int_V \rho_b\, dV + \oint_S \sigma_b\, dS = 0$$

(La carga ligada total es cero)

3.3 Desplazamiento eléctrico y Ley de Gauss en un dieléctrico

- Densidad de carga total = densidad de carga ligada + densidad de carga libre

$$\rho_t = \rho_b + \rho_l = -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_l$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0} = \frac{-\nabla \cdot \vec{P} + \rho_l}{\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho_l \quad = \nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)$$

- Desplazamiento eléctrico: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

- Ley de Gauss generalizada (en un material dieléctrico):
  - Diferencial $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l$
  - Integral $\int_V \nabla \cdot \vec{D}\, dV = \int_V \rho_l\, dV \quad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = Q_l$

3.4 Dieléctricos lineales, isotrópicos y homogéneos

- En los dieléctricos lineales la polarización es proporcional al campo eléctrico

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

- La constante de proporcionalidad χ_e es la susceptibilidad eléctrica, que caracteriza la "respuesta" de un material a un campo eléctrico.

- El campo ***E*** es el campo *total*, creado por todas las cargas (libres y ligadas).

- Si tenemos un campo externo $\boldsymbol{E}_0$, este induce una polarización, que da lugar a cargas ligadas que crean su propio campo, $\boldsymbol{E}_b$. El campo total será $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_b$.

- Desplazamiento eléctrico $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

- ε = permitividad del material $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$

- k = constante dieléctrica o permitividad relativa $k = \varepsilon / \varepsilon_0 = \varepsilon_r = 1 + \chi_e$

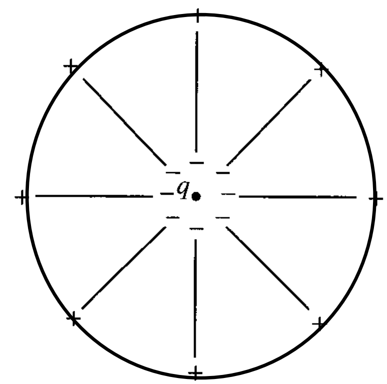
Dieléctricos lineales

Material	Dielectric Constant	Material	Dielectric Constant
Vacuum	1	Benzene	2.28
Helium	1.000065	Diamond	5.7
Neon	1.00013	Salt	5.9
Hydrogen	1.00025	Silicon	11.8
Argon	1.00052	Methanol	33.0
Air (dry)	1.00054	Water	80.1
Nitrogen	1.00055	Ice (-30° C)	99
Water vapor (100° C)	1.00587	$KTaNbO_3$ (0° C)	34,000

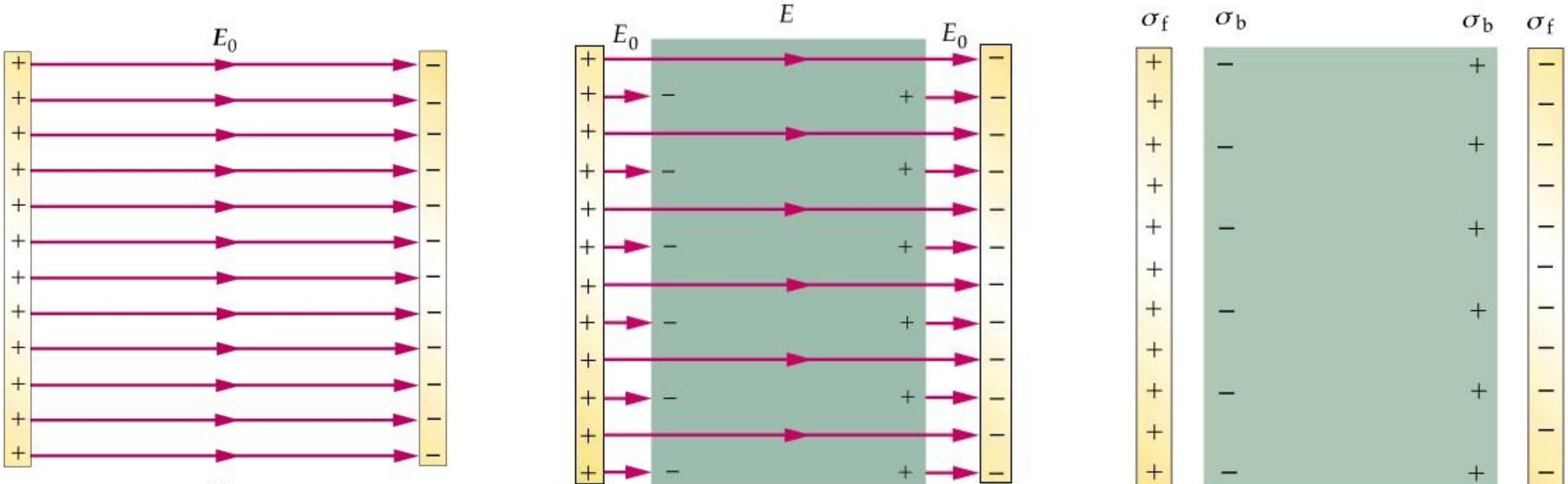
- Ejemplo: esfera dieléctrica de permitividad ε con una carga *q* en el centro

$$\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\, dS = q$$

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{E} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q}{\varepsilon}\hat{r}$$



Ejemplo: condensador con un dieléctrico lineal



(a)

(b)

$$\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\,dS = Q_l \quad\Rightarrow\quad D=\sigma_l \qquad\qquad \vec{D}=\varepsilon\vec{E} \quad\Rightarrow\quad E=\frac{\sigma_l}{\varepsilon}$$

$$C=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{\sigma_l A}{Ed} \quad\Rightarrow\quad C=\frac{\sigma_l A}{(\sigma_l/\varepsilon)d} \quad\Rightarrow\quad C=\frac{\varepsilon A}{d}=\varepsilon_r C_0 \qquad C_0=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\sigma_b = P = D-\varepsilon_0 E = \varepsilon E-\varepsilon_0 E=\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)\frac{\sigma_l}{\varepsilon} \qquad\Rightarrow\quad \sigma_b=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_l$$

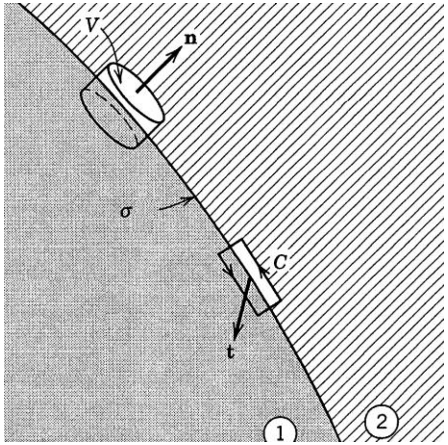
3.5 Condiciones de contorno en medios dieléctricos

- En el vacío vimos que (Tema 1):

$$\boxed{E_2^{\perp} - E_1^{\perp} = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_l + \sigma_b}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\vec{E}_2^{\parallel} = \vec{E}_1^{\parallel}}$$

$$\boxed{V_2 = V_1}$$



- Cuando hay dieléctricos: $\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\, dS = Q_l \Rightarrow \boxed{D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \sigma_l}$

- Cuando los medios son <u>dieléctricos lineales</u>: la densidad de carga ligada es proporcional a la densidad de carga libre

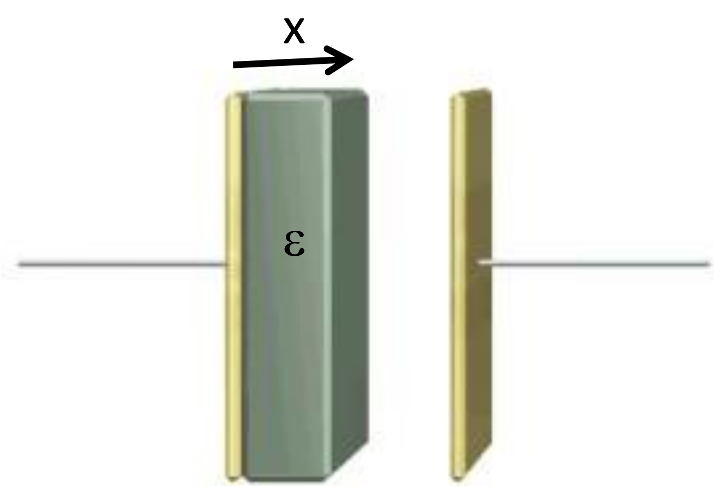
$$\rho_b = -\nabla\cdot\vec{P} = -\nabla\cdot\left(\varepsilon_0\chi_e\vec{E}\right) = -\nabla\cdot\left(\varepsilon_0\chi_e\frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) = -\frac{\varepsilon_0\chi_e}{\varepsilon}\nabla\cdot\vec{D} = -\frac{\varepsilon_0\chi_e}{\varepsilon}\rho_l$$

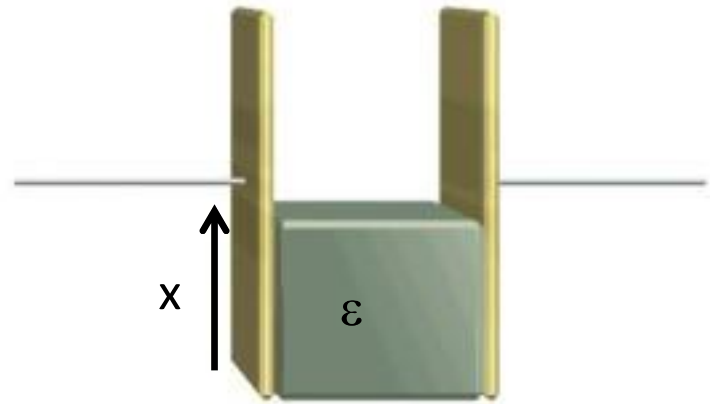
- Si $\rho_l = 0 \Rightarrow \rho_b = 0 \quad \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_t}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_l + \rho_b}{\varepsilon_0} = 0$

En el interior del dieléctrico si no hay cargas libres se cumple la ecuación de Laplace

Ejemplo: calcular la capacidad de los condensadores

- Las placas tienen área de dimensiones a x b y están separadas una distancia d





$$C = \frac{ab}{x/\varepsilon + (d-x)/\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 (a-x) b}{d} + \frac{\varepsilon x b}{d}$$

$$C = C_1 + C_2$$

3.6 Energía electrostática en un medio dieléctrico

- Vimos que el trabajo que hay que hacer para cargar un capacitor, cuando hay vacío entre sus placas, es $W = \frac{1}{2} C_0 V^2$
- Cuando hay un dieléctrico entre las placas del condensador, hay que aumentar la carga libre para compensar la carga ligada, y el trabajo es:

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} C_0 V^2$$

- Se puede demostrar que en medios dieléctricos, la densidad de energía electrostática es:

$$u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

- En el vacío: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow u = \frac{\varepsilon_0}{2} \left|\vec{E}\right|^2$
- En un dieléctrico lineal: $\vec{D} = \varepsilon \, \vec{E} \Rightarrow u = \frac{\varepsilon}{2} \left|\vec{E}\right|^2$

3.7 Dieléctricos no LIH

- En algunos cristales que contienen moléculas polares (ej. cuarzo) las tensiones mecánicas producen una polarización de las moléculas.
- Este efecto se denomina efecto piezoeléctrico.
- La polarización del material genera una diferencia de potencial que puede usarse para generar una corriente eléctrica.
- El efecto piezoeléctrico se usa para convertir tensiones mecánicas (deformaciones) en señales eléctricas (ejemplo: micrófonos).
- El efecto inverso (un voltaje aplicado genera una tensión mecánica que da lugar a una deformación) se usa en muchos dispositivos (ejemplo: auriculares).
- En algunos cristales (piro eléctricos) cuando aumenta la temperatura se generan campos eléctricos.
- En muchos cristales la polarización depende de la orientación del campo eléctrico (relativa a los ejes de simetría del cristal)

$$
\begin{aligned}
P_x &= \epsilon_0(\chi_{e_{xx}} E_x + \chi_{e_{xy}} E_y + \chi_{e_{xz}} E_z) \\
P_y &= \epsilon_0(\chi_{e_{yx}} E_x + \chi_{e_{yy}} E_y + \chi_{e_{yz}} E_z) \\
P_z &= \epsilon_0(\chi_{e_{zx}} E_x + \chi_{e_{zy}} E_y + \chi_{e_{zz}} E_z)
\end{aligned}
$$