Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament de Física i Enginyeria Nuclear
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

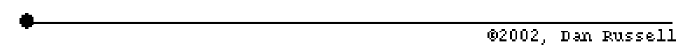
Modulo II: Ondas

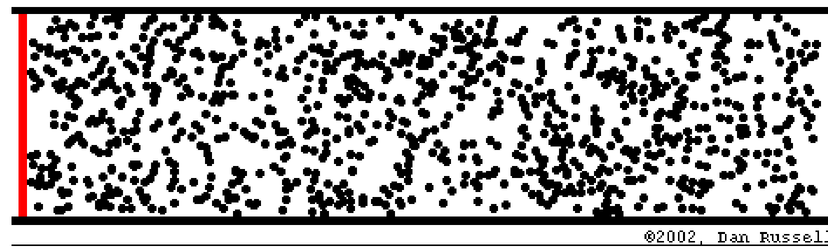
1. **Introducción a las Ondas**
2. **Ondas en cuerdas**
3. **Ondas sonoras y acústica**

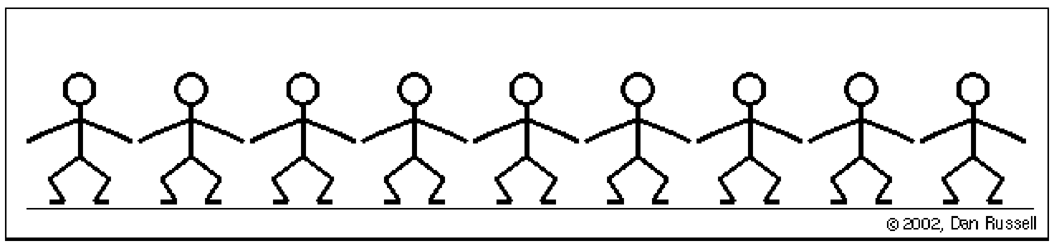
1.1 Ejemplos y definición de onda
1.2 Función de onda viajera
1.3 Ondas armónicas
1.4 Ecuación de ondas y velocidad de propagación

Bibliografía: Tipler y Mosca, 6a edición, Capítulo 15
Física con Ordenador de Angel Franco García:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/MovOndulatorio.html

1.1 Ejemplos y definición de onda







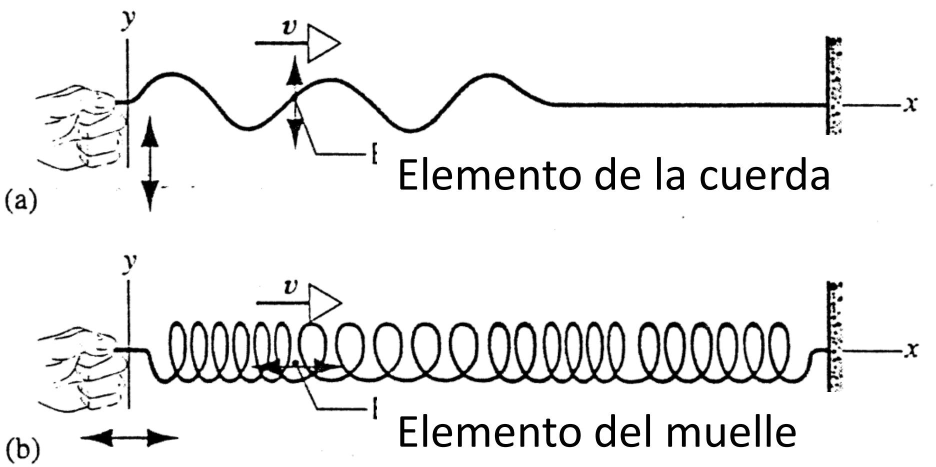
Onda: es una perturbación que se propaga, que transporta energía y cantidad de movimiento, pero no transporta masa.

Clasificación de las ondas en función del ***medio*** de propagación de la onda:

- Ondas mecánicas (cuerdas, barras, sonido, fluidos)
- Ondas electromagnéticas (radio y TV, micro-ondas, rayos X etc)

Ondas mecánicas

Ondas en 1 dimensión (cuerdas, muelles, barras)



Clasificación de las ondas en función de la dirección de propagación:

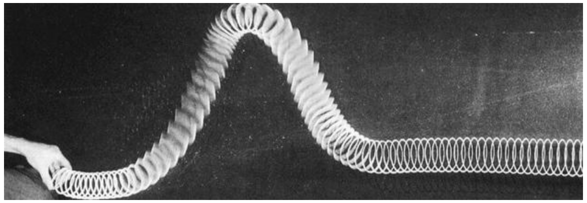
- transversales
- longitudinales

Ondas en 2 dimensiones (ejemplo: en la superficie de un fluido)

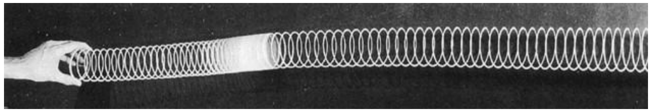
Ondas en 3 dimensiones (ejemplo: sonido)

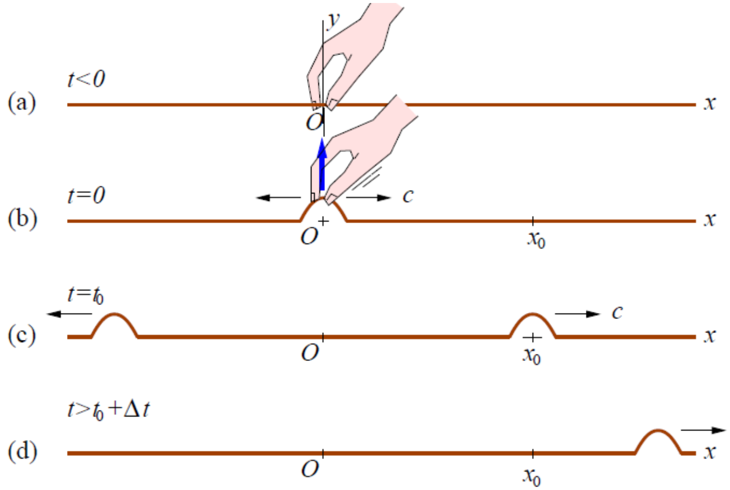
Pulsos (ondas viajeras) y trenes de pulsos

Pulso transversal

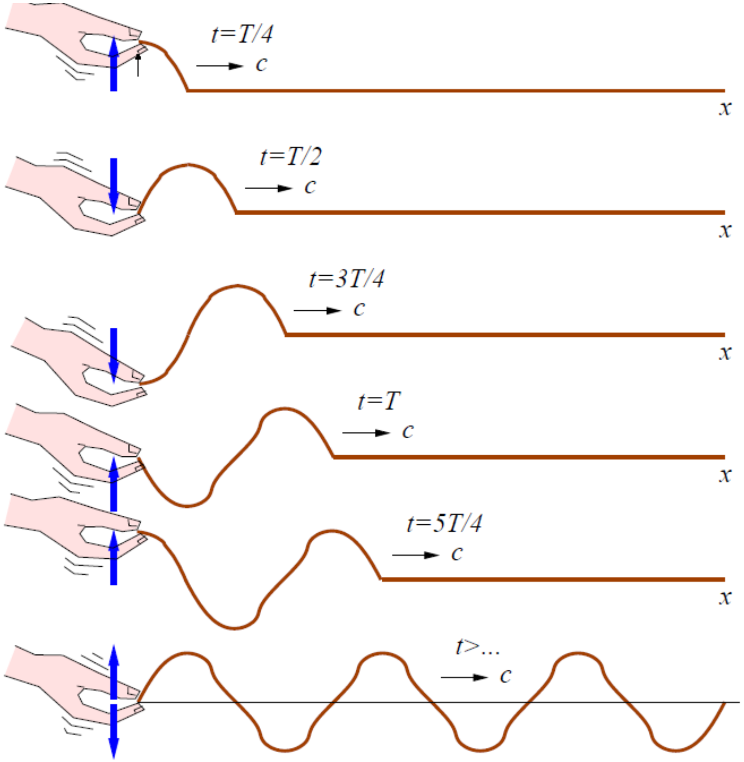


Pulso longitudinal





Tren de pulsos: cuando la perturbación que genera el pulso se mantiene durante un cierto tiempo

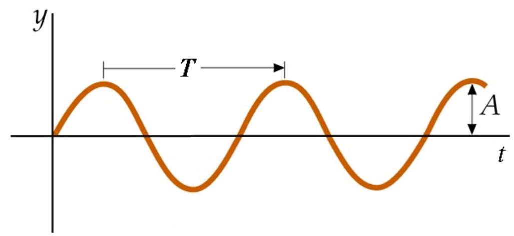


Ondas estacionarias y ondas armónicas

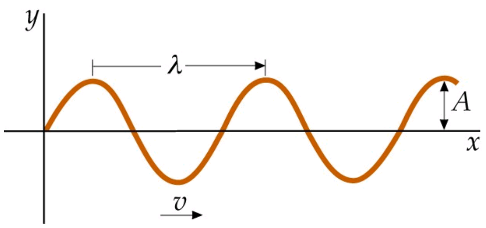
Ondas estacionarias: cuando la perturbación que genera un tren de pulsos se mantiene indefinidamente

Ondas armónicas: la perturbación hace un MAS

Periodicidad temporal



Periodicidad espacial

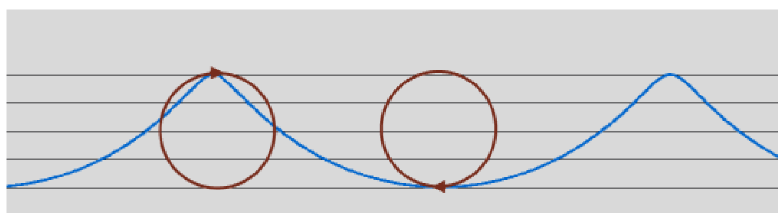


Ondas acústicas, ondas en fluidos

Sonoras
Ondas longitudinales que producen una ligera variación en la ***presión*** del aire.

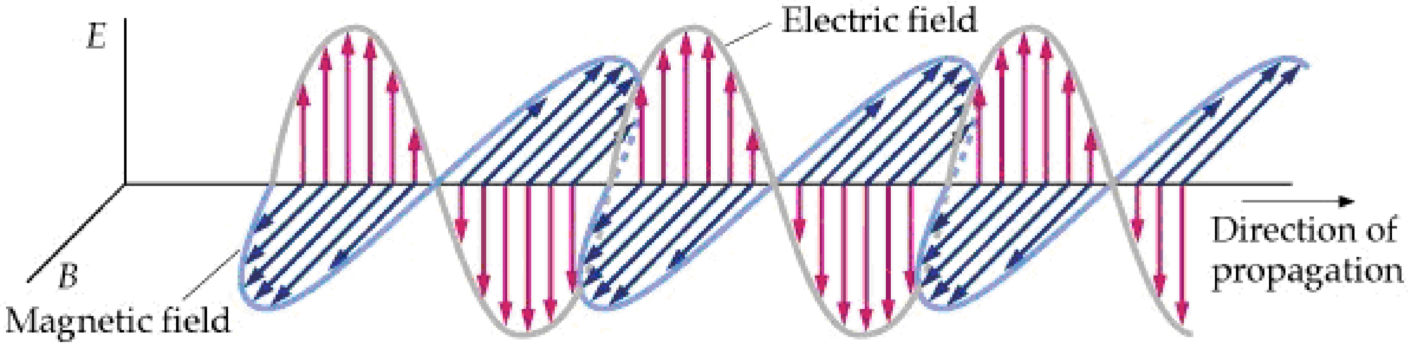
Frecuencias audibles (20 Hz – 20 kHz)
Ultrasonido (> 20 kHz)
Infrasonido (< 20 Hz)

Ondas en la superficie de líquidos



Las partículas en la superficie del líquido se mueven en trayectorias “casi” circulares. Es la suma de dos ondas, una longitudinal (horizontal) y otra trasversal (vertical), perpendiculares entre si y desfasadas $\pi/2$.

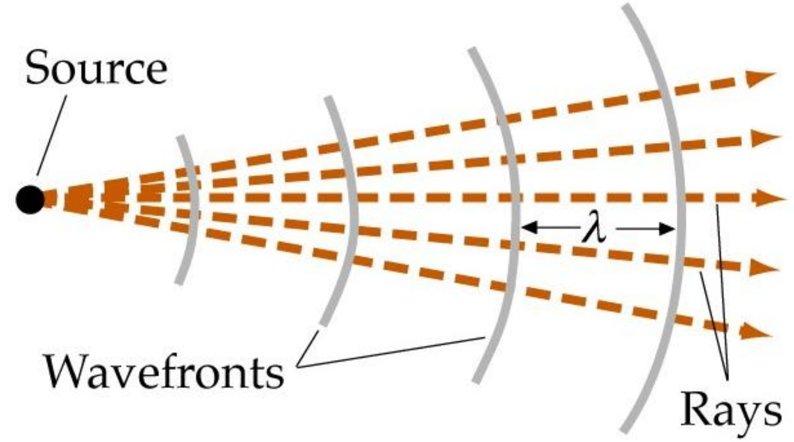
Ondas electromagnéticas



- Perturbación del campo electromagnético.
- Se pueden propagar en el vacio o en un medio material (agua, aire, etc.)
- Son ondas transversales (el campo eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación)
- Ejemplos
  - Ondas radio y de TV;
  - Micro-ondas;
  - Radiación infrarroja, visible o ultravioleta;
  - Rayos X y gamma.

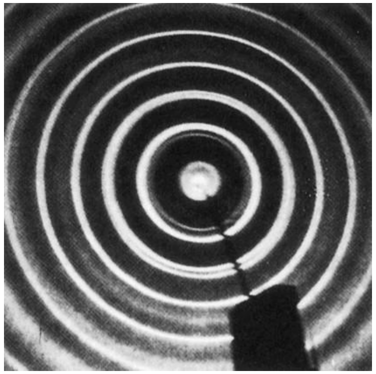
Frentes de Ondas y Rayos

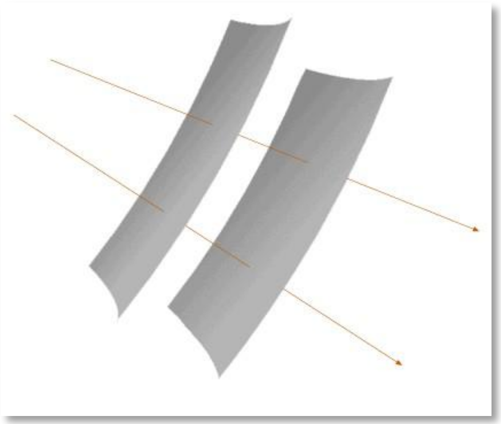
<u>*Frente de ondas:*</u> lugar geométrico de los puntos del medio que tienen el mismo estado de perturbación.



La dirección de propagación de la onda es perpendicular a los frentes de ondas.

<u>*Rayos:*</u> rectas normales a los frentes de ondas que indican la dirección de propagación.





Ondas planas*:* los frentes de ondas son planos paralelos entre si.

Ondas esféricas*:* los frentes de ondas son círculos (2D) o esferas (3D) concéntricas.

Lejos de la fuente un onda esférica se puede aproximar a una onda plana.

Resumen de clasificación de ondas

- *Necesita medio de propagación?*
  - Si: ondas mecánicas
  - No: ondas electromagnéticas
- *La dirección de propagación es en 1, 2 o 3D?*
  - 1: onda plana (ondas en cuerdas, muelles)
  - 2: onda circular (ondas en superficies de líquidos)
  - 3: onda esférica (ondas sonoras)
- *Dirección de la perturbación respecto a la dirección de propagación?*
  - Transversal (ondas en cuerdas, ondas electromagnéticas)
  - Longitudinal (ondas sonoras)
  - Transversal y longitudinal (ondas en muelles, superficiales en líquidos)
- *Periódica?*
  - Si: ondas estacionarias (armónica o no-armónica)
  - No: ondas viajeras (pulsos y trenes de ondas)

Fenómenos ondulatorios

Relacionados con la propagación de ondas

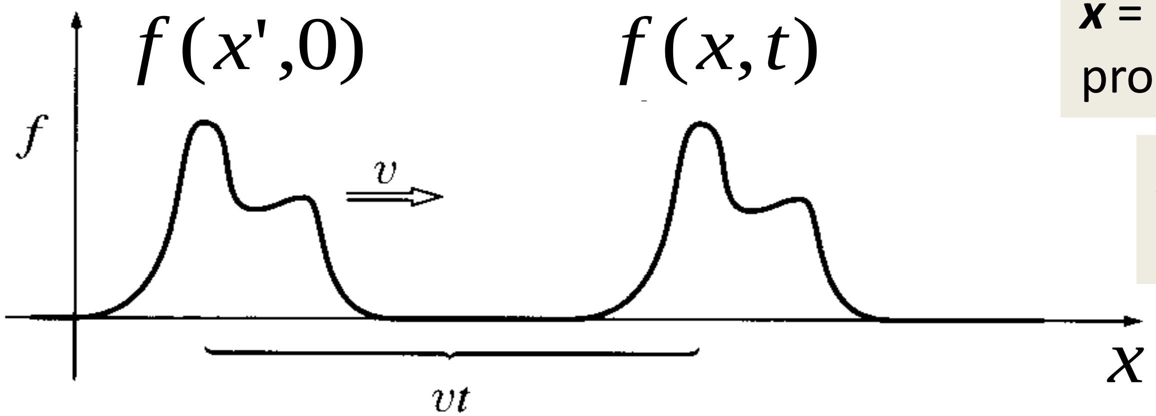
- Reflexión
- Refracción
- Difracción
- Dispersión
- Efecto Doppler
- Atenuación

Relacionados con la superposición de ondas

- Pulsaciones
- Interferencia
- Ondas estacionarias

1.2 Función de onda viajera

Definición: Una función de onda viajera es una función matemática que describe una perturbación que se propaga con velocidad constante y con forma "fija" (no se deforma, el medio es no dispersivo).



***x* = dirección** de propagación de la onda

Sentido de propagación: ***x* > 0**

No se deforma

Se propaga con velocidad *v*

$$\left.\begin{aligned} f(x',0) &= f(x,t) \\ x &= x' + vt \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f(x,t) = f(x - vt)}$$

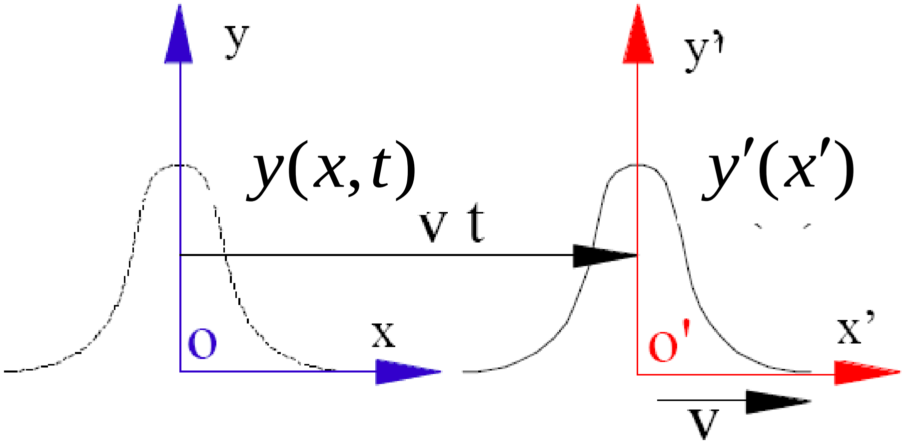
Perturbación que viaja hacia ***x*** positivas

Sentido de propagación hacia ***x*** negativas

$$\boxed{f(x,t) = f(x + vt)}$$

Otro modo de ver que cualquier función que tenga la forma ***f(x-vt)*** representa una onda viajera que se propaga en dirección ***x*** y sentido hacia ***x*** positivas.

Consideramos dos sistemas de referencia, uno "**fijo**" (**azul**) y otro "**móvil**" (**rojo**) que se mueve con la onda.



La onda se propaga sin deformarse:

$$y(x,t) = y'(x')$$

Relación entre el sistema fijo y el móvil:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x,t) = y(x - vt)}$$

Ejemplos

- Funciones que representan ondas viajeras que tienen diferente forma y que se propagan en dirección ***z*** y sentido ***z*** > 0:

$$f_1(z,t) = Ae^{-b(z-vt)^2}, \quad f_2(z,t) = A\sin[b(z-vt)], \quad f_3(z,t) = \frac{A}{b(z-vt)^2+1}$$

- Funciones que NO representan ondas viajeras:

$$f_4(z,t) = Ae^{-b(bz^2+vt)}, \qquad f_5(z,t) = A\sin(bz)\cos(bvt)^3,$$

Pregunta: ¿Es una onda? ¿que velocidad, dirección y sentido tiene?

$$f(x,t) = \frac{5}{3+(5x+40t)^2}$$

Respuesta: si, v=8, dirección x, sentido x negativas

1.3 Ondas armónicas

$$y(x,t) = f(x \pm vt)$$

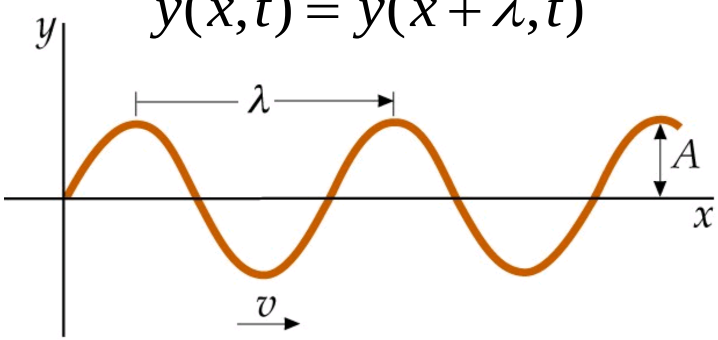
Definición: Cuando la función de onda es ***sinusoidal*** la onda es armónica

k = número de ondas

$$\boxed{y(x,t) = A\cos[k(x \pm vt)]}$$

Periodicidad espacial ("foto" de la cuerda en un tiempo fijo)

$$y(x,t) = y(x+\lambda,t)$$



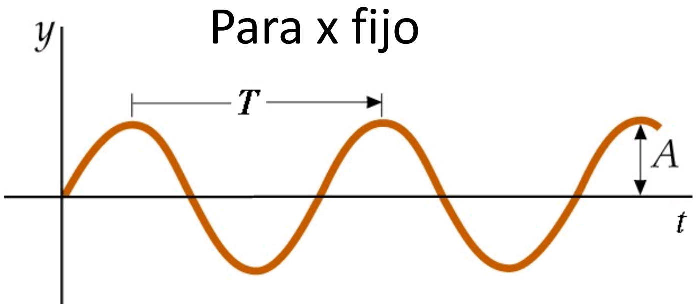
$$t = 0$$

$$\cos(kx) = \cos(kx + 2\pi)$$
$$= \cos[k(x + 2\pi/k)]$$
$$= \cos[k(x+\lambda)]$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

Periodicidad temporal

Para x fijo



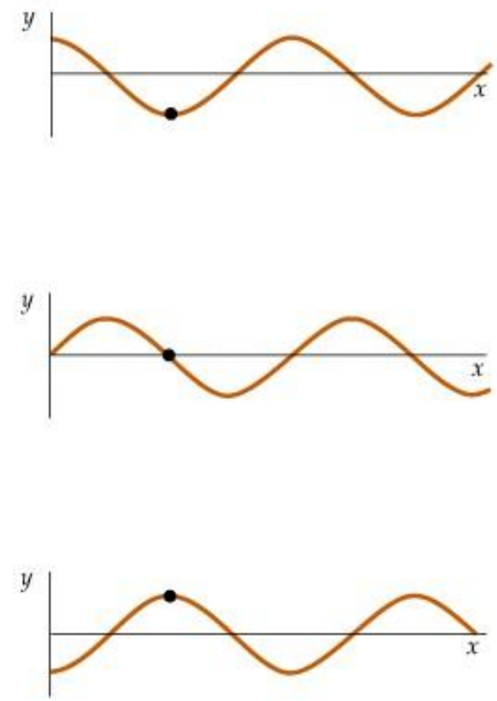
$$x = 0$$

$$y(0,t) = A\cos(kvt)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = kv}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\omega/v} = \frac{v}{f}}$$

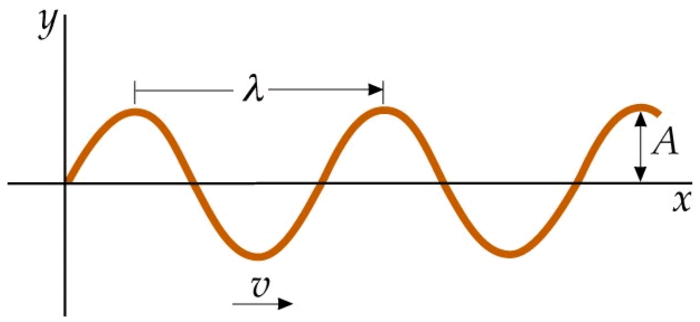
Cada punto de la cuerda efectúa un MAS de frecuencia ω



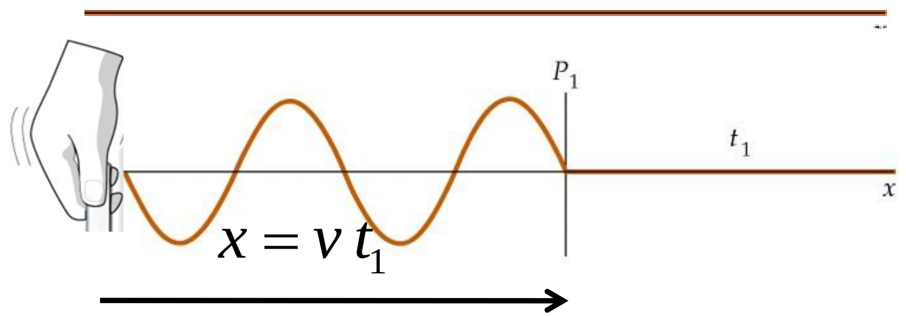
(b)

Relación entre la longitud de onda, la velocidad y la frecuencia de una onda armónica

Suponemos que inicialmente la cuerda esta en reposo y que en t=0 comenzamos a generar una onda armónica.



Al cabo de un tiempo t_1, el frente de ondas recorrió una distancia $x = v\,t_1$



En el frente de ondas hemos generado *N* ondas

$$N = \frac{t_1}{T}$$

$$\lambda = \frac{x}{N}$$

$$\lambda = \frac{v\,t_1}{t_1 / T} \Rightarrow \boxed{\lambda = v\,T = \frac{v}{f}}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= kv \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} \end{aligned}\right\} \lambda = \frac{2\pi}{\omega / v} = vT$$

Parámetros de una onda armónica

$$y(x,t) = y_0 \cos[k(x - vt) + \phi] = y_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

- y_0 — Amplitud de la onda (las unidades dependen del tipo de onda)
- k — Número de onda (rad/m)
- ω — Frecuencia angular (rad/s)
- $f = \omega / 2\pi$ — Frecuencia (1/s=Hz)
- $T = 1/f = 2\pi/\omega$ — Período (s)
- $\lambda = 2\pi/k$ — Longitud de onda (m)
- $kx - \omega t + \phi$ — Fase de la onda en x a tiempo t (rad)
- ϕ — Fase de la onda en x=0 a t=0 (rad)
- $v = \lambda f = \omega/k$ — Velocidad de la onda (m/s)

Ejercicio: La función de onda de una onda armónica que se mueve sobre una cuerda es: $y(x,t) = (0.03\ m)\ sen\ [(2.2\ m^{-1})x - (3.5\ s^{-1})t]$

a)¿En qué dirección se propaga la onda y cuál es su velocidad?

b) Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el período de la onda.

c) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de cualquier segmento de la cuerda?

d) ¿Cuál es el la velocidad máxima de cualquier segmento de la cuerda?

Ejercicio:

Una cuerda se mantiene en tensión y de hace vibrar transversalmente uno de sus extremos, de manera que se genera una onda armónica transversal que se propaga a lo largo de la cuerda a una velocidad v=240m/s. El desplazamiento transversal máximo de cualquier punto de la cuerda es de 1 cm y la distancia entre máximos consecutivos de 3 m. ¿Cuál es la velocidad transversal máxima que tendrá una mosca que está fuertemente cogida a la cuerda?

$$y(x,t) = y_0 \cos[k(x - vt) + \phi] = y_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}} \qquad \boxed{\lambda = v\,T = \frac{v}{f}}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \qquad \boxed{\omega = kv}$$

Notación compleja o fasorial

Una onda armónica se suele escribir como la **parte real** de un número complejo

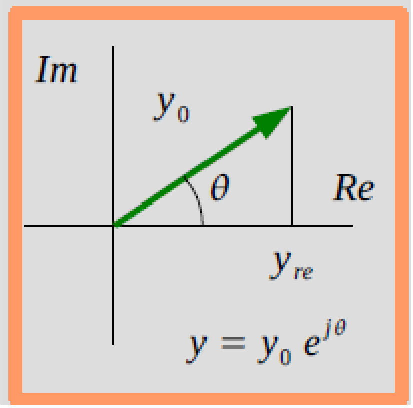
$$\boxed{e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \mathrm{Re}(e^{j\alpha})}$$

$$y_0\cos(kx - \omega t + \phi) = \mathrm{Re}\, y_0 e^{j(kx-\omega t+\phi)} = \mathrm{Re}\, y_0 e^{j\phi} e^{j(kx-\omega t)} = \mathrm{Re}\, y_m e^{j(kx-\omega t)}$$

$$\boxed{y_m = y_0 e^{j\phi}}$$ **amplitud compleja**

$$y = y_0\cos(kx - \omega t + \phi) = \mathrm{Re}\, y_0 e^{j\theta}$$

$$\theta = kx - \omega t + \phi$$



1.4 Ecuación de Ondas

- La función de ondas $y(x,t) = f(x \pm vt)$

es solución de la *ecuación de ondas*

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

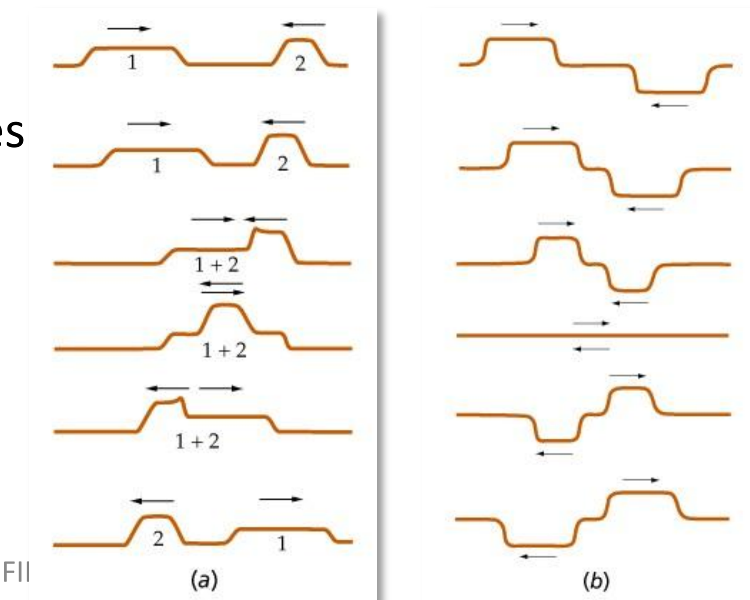
Ecuación diferencial <u>*lineal*</u> en derivadas parciales de 2º orden.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = f'(x \pm vt) \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x \pm vt) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = \pm v \; f'(x \pm vt) \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \; f''(x \pm vt) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 f''(x \pm vt) = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Como la ecuación de ondas es <u>*lineal*</u>, la solución general de la ecuación de ondas es la superposición de dos ondas que se propagan en sentidos opuestos y que no tienen porque tener la misma forma.

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$



Principio de Superposición

Si $y_1(x,t)$, $y_2(x,t)$ son dos ondas que cumplen la ecuación de ondas, $\boldsymbol{Ay_1 + By_2}$ también

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 (Ay_1 + By_2)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (Ay_1 + By_2)}{\partial t^2} = 0$$

$$A\cancel{\left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}\right]} + B\cancel{\left[\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right]} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{Ay_1 + By_2}$ también es una onda

- ***El Principio de Superposición es consecuencia de que la ecuación de ondas es lineal.***

Pregunta: De las siguiente ecuaciones en derivadas parciales, ¿cuales son lineales y cuales no lo son?

a) $\dfrac{\partial y}{\partial t} = -k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ b) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\,y^2 + b\dfrac{\partial y}{\partial x}$

c) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ d) $\dfrac{\partial y}{\partial t} = y\left(a + b\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)$

Velocidad de propagación de una onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\boxed{v^2}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Para saber con que velocidad se propaga una onda es necesario conocer las características físicas del medio

La velocidad depende del medio en que se propaga la onda

- En una ***cuerda***

  F = tensión de la cuerda (N)

  μ = densidad lineal (Kg/m)

$$\boxed{v = \sqrt{F / \mu}}$$

- En una ***barra***

  Y = módulo de Young (N/m^2)

  ρ = densidad de la barra (Kg/m^3)

$$\boxed{v = \sqrt{Y / \rho}}$$

- En un ***líquido***

  B = módulo de compresibilidad (N/m^2)

  ρ = densidad del fluido (Kg/m^3)

$$\boxed{v = \sqrt{B / \rho}}$$

- ***Ondas electromagnéticas***

  n = índice de refracción

  c = velocidad de la luz en el vacío (3x10^8 m/s)

$$\boxed{v = c / n}$$

- En un ***gas***

  γ = constante adiabática del gas (adimensional)

  ρ = densidad del gas

  P = presión del gas

$$\boxed{v = \sqrt{\gamma P / \rho}}$$

- En un ***gas ideal***

  T = temperatura en ^{0}K

$$\boxed{v = \sqrt{\gamma RT / M}}$$