Modulo II: Ondas

1. Introducción a las Ondas
2. **Ondas en cuerdas**
3. Ondas sonoras y acústica

2.1 Ecuación de ondas en una cuerda tensa
2.2 Energía de una onda en una cuerda
2.3 Atenuación
2.4 Reflexión y transmisión de ondas
2.5 Superposición de ondas: interferencia y ondas estacionarias

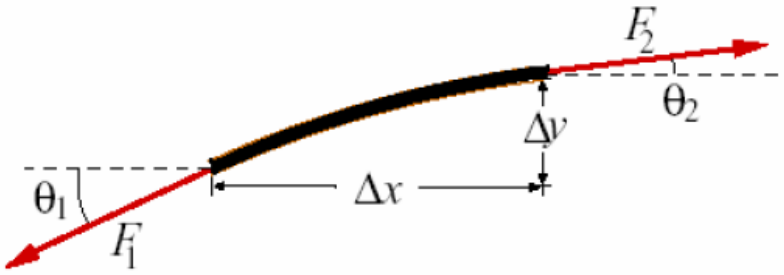
Bibliografía: Tipler y Mosca, 6a edición, Capítulo 15
Física con Ordenador de Angel Franco García:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/MovOndulatorio.html

2.1 Ecuación de ondas en una cuerda tensa

Mostraremos que la velocidad de propagación de la onda es $v = \sqrt{F/\mu}$

Consideramos una cuerda tensa de densidad lineal μ (kg/m)

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$



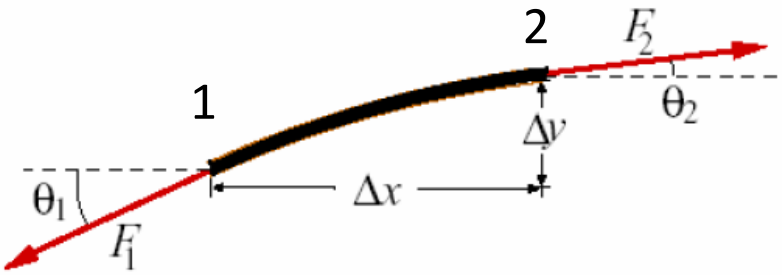
Consideramos un elemento de la cuerda de masa Δm y estudiamos las fuerzas a que esta sometido. Hacemos las siguientes aproximaciones:

1) θ_1 y θ_2 son ángulos pequeños: $\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$ (tangente a la cuerda)

2) La tensión es >> que el peso del elemento de cuerda $F_1 \approx F_2 = F$
(las fuerzas son iguales en módulo pero no en dirección, $\theta_1 \neq \theta_2$)

3) La onda es transversal $\Rightarrow$ el movimiento del elemento de cuerda es vertical.

Ecuación de ondas en una cuerda tensa



I $$\sum F_y = F(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \approx F(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = F\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_2 - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_1\right]$$

II $$\sum F_y = \Delta m\, a = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_2 - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

I=II $$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_2 - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_1\right] = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

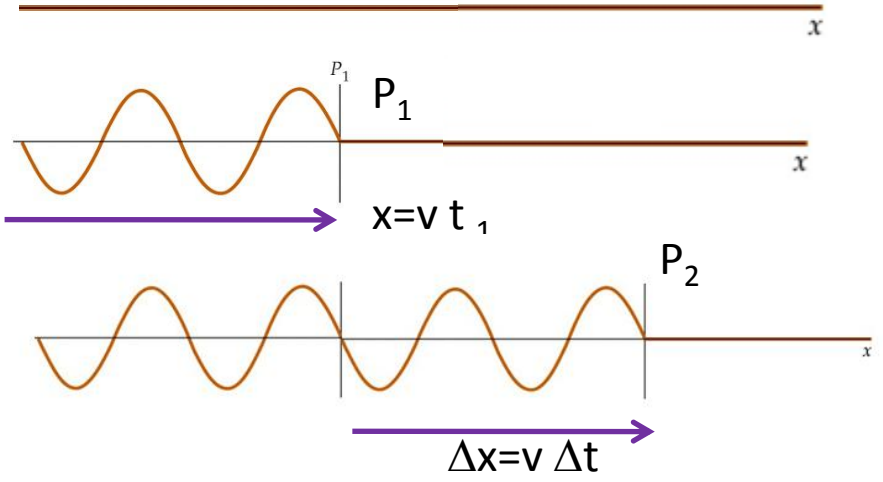
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Velocidad de propagación de la onda en la cuerda

Maseller, OOT

2.2 Energía de una onda en una cuerda

- Suponemos que inicialmente la cuerda esta en reposo y que en t=0 comenzamos a generar una onda armónica.
- Al cabo de un tiempo t_1, el frente de ondas recorrió una distancia $x = v\,t_1$ y llego a P_1
- Un tiempo posterior $t_2 = t_1 + \Delta t$, el frente de ondas recorrió $\Delta x = v\,\Delta t$ y llego a P_2



El variación de la energía de la cuerda debido al avance de la onda será la energía del MAS que realiza este nuevo trozo de cuerda (de masa Δm y densidad de masa μ)

$$\Delta E = \frac{\Delta m v_{\max}^2}{2} = \frac{\mu \Delta x}{2}(y_0\omega)^2$$

$\mu = \Delta m / \Delta x$

$v_{\max} = y_0\omega$ (velocidad máxima del trozo de la cuerda)

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \eta = \frac{\mu}{2}(y_0\omega)^2$$ *Densidad de energía*

La onda se propaga con velocidad v

$$\Delta x = v\Delta t$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P = \frac{\mu}{2} v (y_0\omega)^2$$ *Potencia trasmitida*

Ejercicios

Una onda armónica de longitud de onda 25 cm y amplitud 1.2 cm se mueve a lo largo de un segmento de 15 m de una cuerda de 60 m de longitud y 320 g de masa que esta sometida a una tensión de 12 N. a) Determinar la velocidad y la frecuencia angular de la onda. b) ¿Cuál es la energía total media de la onda? c) ¿Cuál es la energía total media trasmitida por unidad de tiempo a lo largo de la cuerda?

Atamos un diapasón a un alambre y generamos ondas armónicas transversales de frecuencia 440 Hz y 0.5 mm de amplitud. El alambre tiene una densidad lineal de 0.01 kg/m y está sometido a una tensión de 1000 N. Determinar:

a) El periodo de las ondas en el alambre.

b) La velocidad de las ondas en el alambre.

c) Escribir la función de onda en el alambre.

d) Velocidad y aceleración máxima de un punto cualquiera del alambre.

e) ¿Qué potencia debe suministrar el diapasón para que la amplitud sea constante?

$$P = \frac{\mu}{2} v (y_0 \omega)^2 \qquad \omega = 2\pi f$$

b) 316,2 m/s

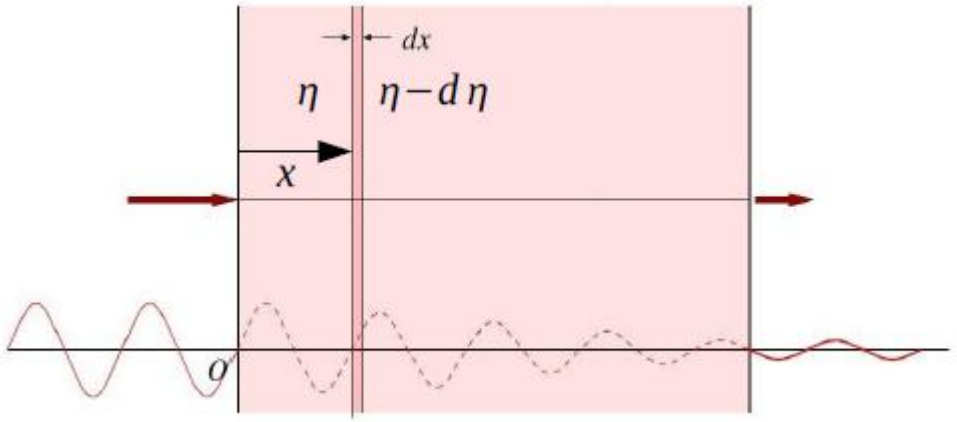
$\Rightarrow$ e) 3,02 W

2.3 Atenuación de una onda en un medio absorbente

Cuando una onda se propaga en un medio va perdiendo energía. Se observa experimentalmente que la densidad de energía disminuye como

$$\Delta\eta = -\beta\eta\Delta x$$

donde β es el <u>coeficiente de atenuación</u> que depende del medio y de la frecuencia de la onda.



$$d\eta = -\beta\eta dx \Rightarrow \frac{d\eta}{\eta} = -\beta dx$$

$$\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\eta} = -\int_0^x \beta dx \Rightarrow \ln\frac{\eta}{\eta_0} = -\beta x$$

$$\eta = \eta_0 e^{-\beta x}$$ *Atenuación de la densidad de energía*

Como la energía es proporcional a la amplitud de la onda al cuadrado:

$$y(x,t) = y_0(x)\cos(kx-\omega t) \Rightarrow y_0(x) = y_0(0)e^{-\beta x/2}$$ *Atenuación de la amplitud de la onda*

Ejercicio

La función de onda de una onda armónica que se propaga por una cuerda de densidad de masa 0.02 kg/m es (un unidades del SI):

$$y(x,t) = 0.04\cos(20\,x + 100\,t)$$

a) Determinar la potencia media de la onda si no hay atenuación.

b) Si el coeficiente de atenuación es β=0.5 m^{-1}, ¿al cabo de cuantos metros la amplitud de la onda habrá disminuido hasta la mitad del valor inicial?

Respuesta: P=0.8 W, x = 2.77 m

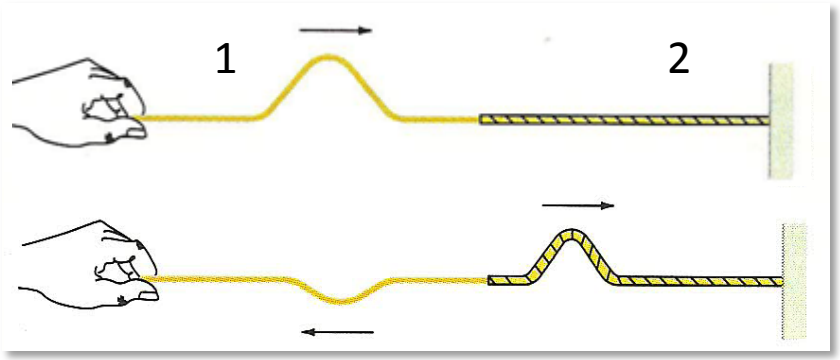
$$P = \frac{\mu}{2} v (y_0 \omega)^2$$

$$y_0(x) = A e^{-\beta x/2}$$

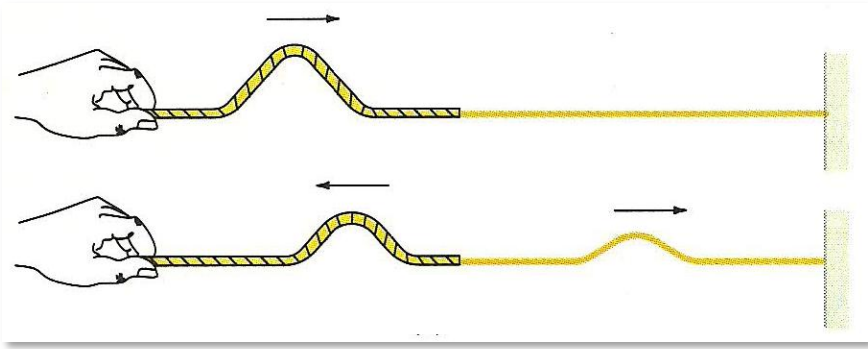
2.4 Reflexión y trasmisión de ondas en cuerdas

Consideramos dos cuerdas de densidades diferentes unidas y sometidas a una misma tensión.
Un pulso se propaga por la cuerda 1.
Al pasar a la cuerda 2, parte del pulso se refleja y parte se transmite.

$\mu_1 < \mu_2$



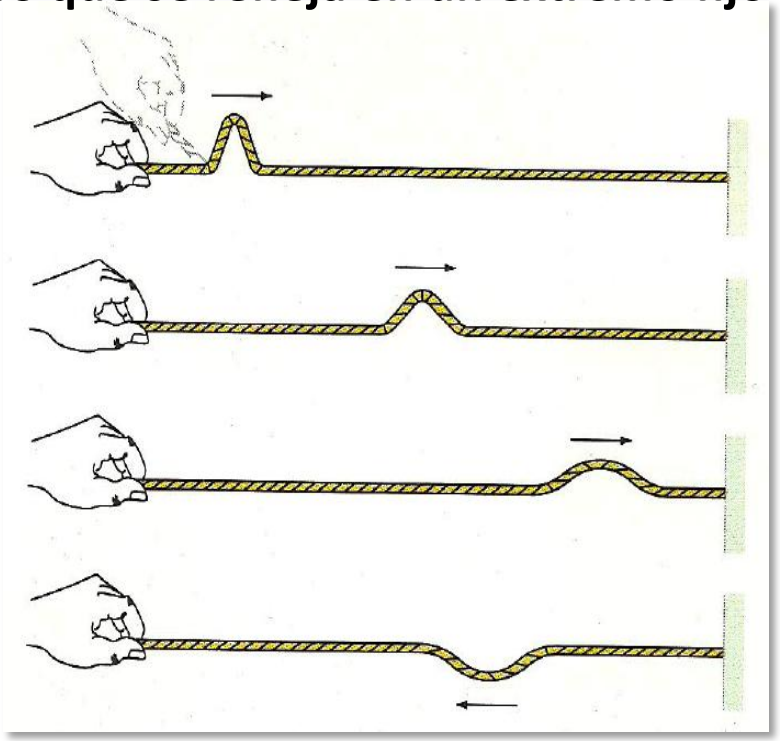
$\mu_1 > \mu_2$



- Si la segunda cuerda es mas pesada el pulso reflejado se invierte
- Si la segunda cuerda es mas liviana el pulso reflejado no se invierte
- El pulso trasmitido nunca se invierte
- Notar las diferentes amplitudes de la onda incidente, trasmitida y reflejada, debido a la conservación de la energía

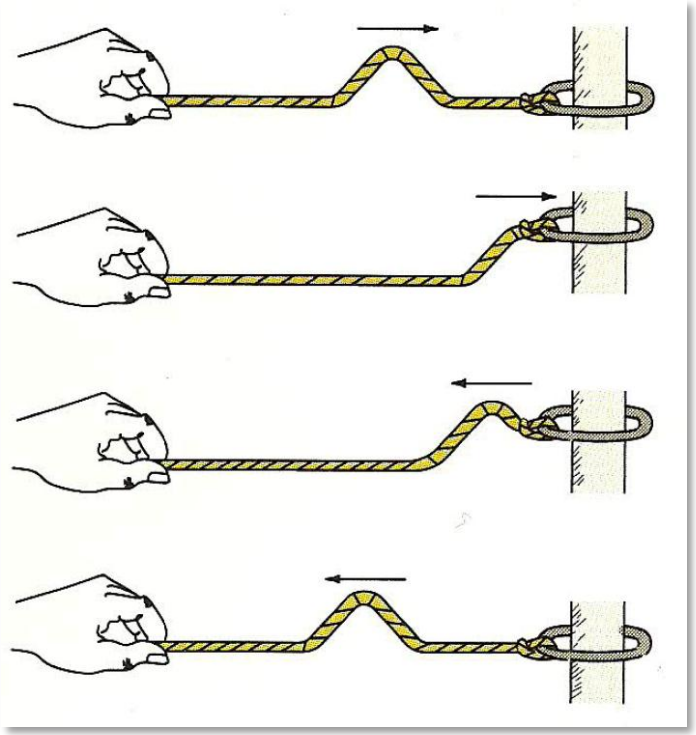
Reflexión de ondas en el extremo de una cuerda

Pulso que se refleja en un extremo fijo



El pulso reflejado se invierte (el extremo fijo actúa como otra cuerda muy pesada)

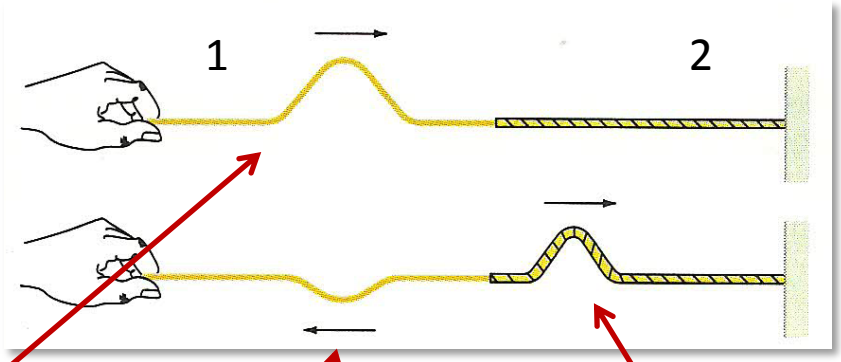
Pulso que se refleja en un extremo libre



El pulso reflejado no se invierte (el extremo libre actúa como otra cuerda muy liviana)

Reflexión y trasmisión de ondas en cuerdas

En la cuerda 1 tenemos la superposición de dos ondas que viajan en sentidos opuestos.



$$y_1(x,t) = y_{0,i}\cos(k_1 x - \omega_1 t) + y_{0,r}\cos(k_1 x + \omega_1 t)$$

$$y_2(x,t) = y_{0,t}\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$v_1 = \sqrt{F/\mu_1} = \omega_1 / k_1$$

$$v_2 = \sqrt{F/\mu_2} = \omega_2 / k_2$$

(misma fuerza)

Como las cuerdas tienen distinta densidad de masa, la velocidad de propagación de las ondas en cada cuerda es diferente.
La onda incidente y la onda reflejada tienen la misma velocidad porque ambas se propagan por la cuerda 1.

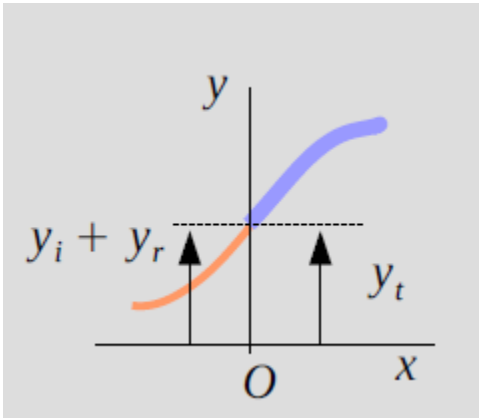
Amplitud de las ondas trasmitida y reflejada

En el punto de unión de las dos cuerdas, **x=0**:

- los extremos de las cuerdas coinciden
- las pendientes de las cuerdas coinciden

Estas condiciones deben cumplirse en todo instante (∀ **t**)

⇒ la frecuencia de las ondas debe ser la misma en las dos cuerdas, $\omega_1=\omega_2$.



$$y_1(x,t) = y_{0,i}\cos(k_1 x - \omega t) + y_{0,r}\cos(k_1 x + \omega t)$$

$$y_2(x,t) = y_{0,t}\cos(k_2 x - \omega t)$$

$$v_1 = \sqrt{F/\mu_1} = \omega/k_1$$

$$v_2 = \sqrt{F/\mu_2} = \omega/k_2$$

$$y_1(0,t) = y_2(0,t)$$

$$\left.\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\Rightarrow \quad y_{0,i} + y_{0,r} = y_{0,t}$$

$$k_1 y_{0,i} - k_1 y_{0,r} = k_2 y_{0,t}$$

$$\Rightarrow \quad k_2 = k_1\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

la longitud de onda cambia $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Rightarrow \quad y_{0,r} = \frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}\, y_{0,i} = r\, y_{0,i}$$

$$y_{0,t} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}\, y_{0,i} = t\, y_{0,i}$$

Cambia de signo si $\mu_2>\mu_1$

r, t: coeficientes de reflexión y transmisión en amplitud

Coeficientes de reflexión y de trasmisión

Calculamos la potencia trasmitida y reflejada. Vimos que: $$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\mu}{2} v (y_0 \omega)^2$$

$$P_i = \frac{\mu_1}{2} v_1 (y_{0,i}\omega)^2 \qquad P_r = \frac{\mu_1}{2} v_1 (y_{0,r}\omega)^2 \qquad P_t = \frac{\mu_2}{2} v_2 (y_{0,t}\omega)^2$$

Coeficiente de reflexión (de energía) $$R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{y_{0,r}^2}{y_{0,i}^2}$$

Coeficiente de trasmisión (de energía) $$T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{\mu_2 v_2 y_{0,t}^2}{\mu_1 v_1 y_{0,i}^2} = \frac{\sqrt{\mu_2}\, y_{0,t}^2}{\sqrt{\mu_1}\, y_{0,i}^2}$$

$v_1 = \sqrt{F/\mu_1}$

$v_2 = \sqrt{F/\mu_2}$

$$y_{0,r} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\, y_{0,i}$$

$$y_{0,t} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\, y_{0,i}$$

$$R = \left(\frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \right)^2$$

$$T = \frac{4\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}}{\left(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}\right)^2}$$

Si sumamos $$R + T = 1$$

Conservación de la energía

Coeficientes de reflexión y de trasmisión

Para una onda que se refleja y se transmite en una cuerda, los coeficientes de reflexión y de refracción en amplitud se pueden escribir en función de las dos velocidades de propagación en las dos cuerdas:

$$r = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

$$r = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{F}} - \sqrt{\frac{\mu_2}{F}}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{F}} + \sqrt{\frac{\mu_2}{F}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_1}{F}}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{F}} + \sqrt{\frac{\mu_2}{F}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$r = \frac{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

$$t = \frac{\frac{2}{v_1}}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$$

$$t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$$

Relaciones de Fresnel: valen para todas las ondas que se reflejan y se trasmiten en dos medios diferentes (en barras, en cuerdas, acústicas, electromagnéticas, etc)

2.5 Superposición de ondas: interferencia

Caso 1: Sumamos 2 ondas armónicas que tienen igual amplitud, se propagan **en igual dirección y sentido**, y tienen distinta fase.

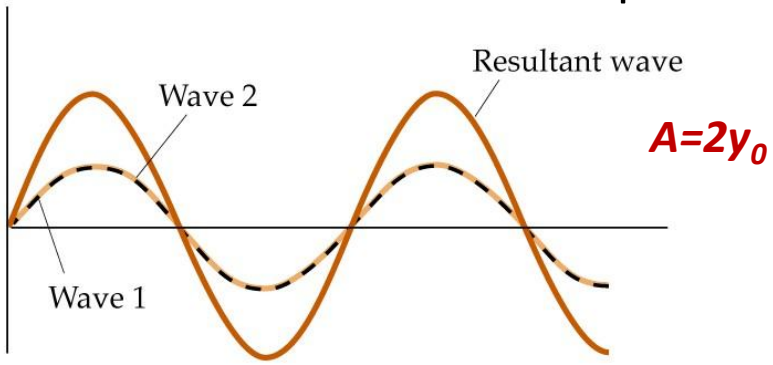
$$y_1 = y_0 \cos(kx - \omega t)$$
$$y_2 = y_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$y_1 + y_2 = y_0[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx - \omega t + \phi)] = \underbrace{2y_0 \cos(\phi/2)}_{A}\cos(kx - \omega t)$$

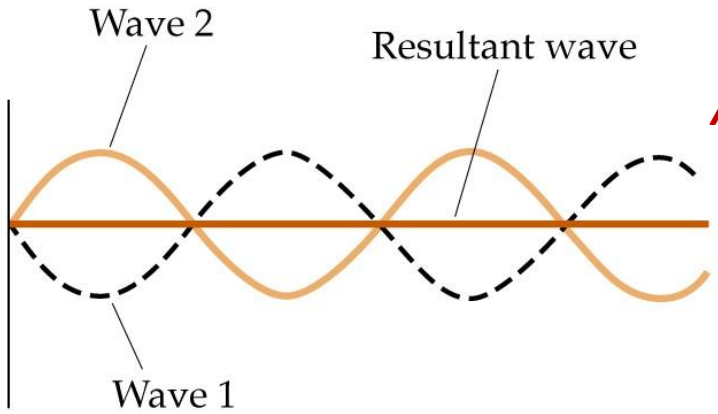
$\Rightarrow$ $y_1 + y_2$ es una onda armónica cuya amplitud A depende de ϕ

Interferencia constructiva: $\phi=0$



$A=2y_0$

Interferencia destructiva: $\phi=\pi$

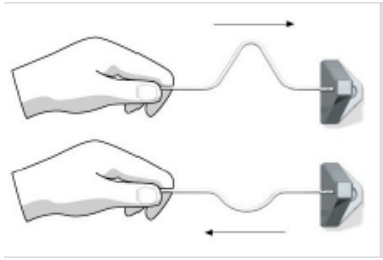


$A=0$

Superposición de ondas: ondas estacionarias

Caso 2: Sumamos dos ondas armónicas que tienen igual amplitud, **se propagan en sentidos opuestos** y tienen una diferencia de fase igual a π.

$$y_1 = y_0 \cos(kx - \omega t)$$
$$y_2 = y_0 \cos(kx + \omega t + \pi)$$



$$y_1 + y_2 = y_0\left[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t + \pi)\right]$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(kx)$$

$$y_1 + y_2 = 2y_0 \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y_1 + y_2 = -2y_0 \sin(kx)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = -2y_0 \sin(kx)\sin\omega t$$

Nodos: puntos que NO oscilan $\sin(kx_{\text{nodo}}) = 0$

Vientres: puntos que oscilan con amplitud máxima $\sin(kx_{\text{vientre}}) = 1$

Ondas estacionarias en una cuerda con ambos extremos fijos

$$y = y_0 \sin(kx) \sin \omega t$$

Los dos extremos deben ser nodos

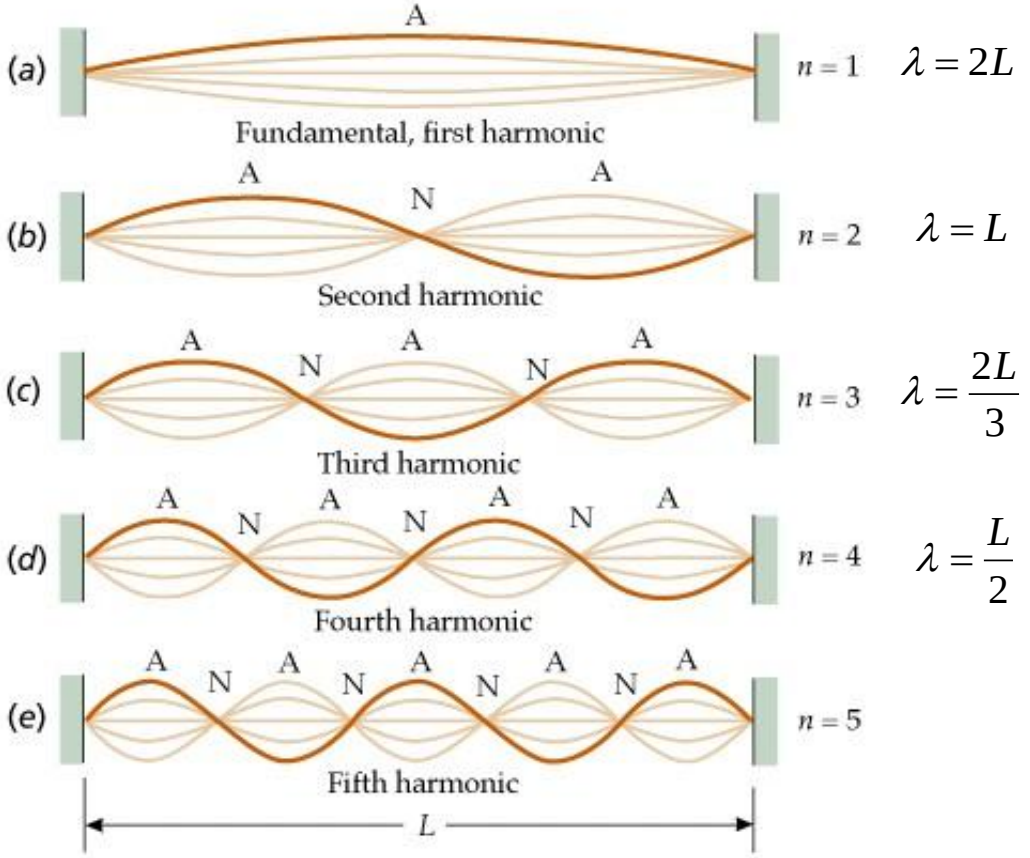
$$y(0,t) = 0 \Rightarrow \sin(k \cdot 0) = 0 \quad \checkmark$$

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0$$

$$\Rightarrow kL = n\pi \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

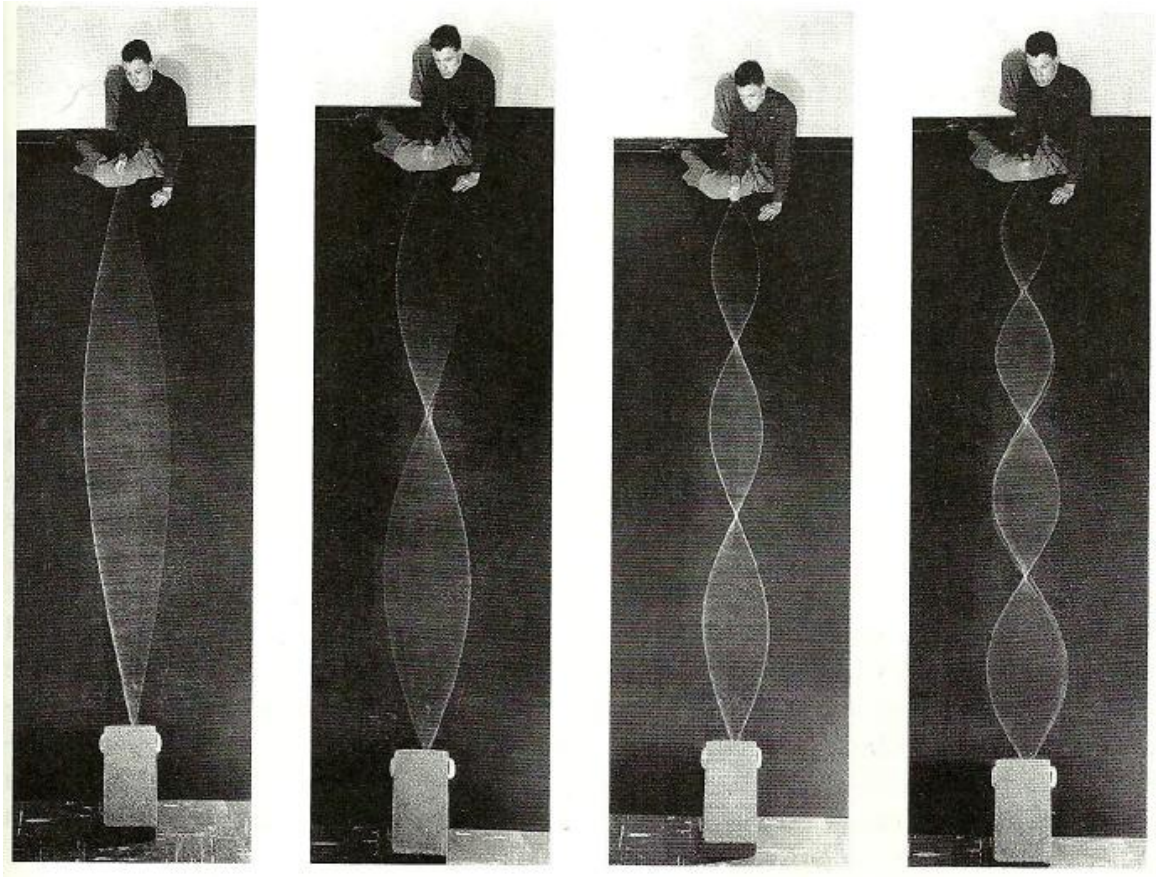
$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow f_n = n\frac{v}{2L}$$



f_1= frecuencia fundamental,
f_2 = segundo harmónico,
f_3 = tercer harmónico, etc.

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

Cuerda fija en ambos extremos



$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad f_n = n\frac{v}{2L}$$

Ondas estacionarias en una cuerda un extremo fijo

$$y = -2y_0 \sin(kx)\sin\omega t$$

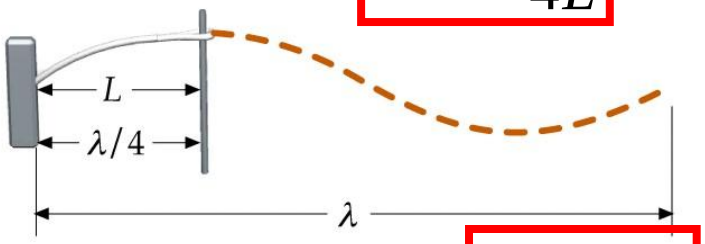
Nodo en *x=0* $\quad y(0,t) = 0$ ✓

Vientre en *x=L* $\quad \Rightarrow \sin(kL) = 1$

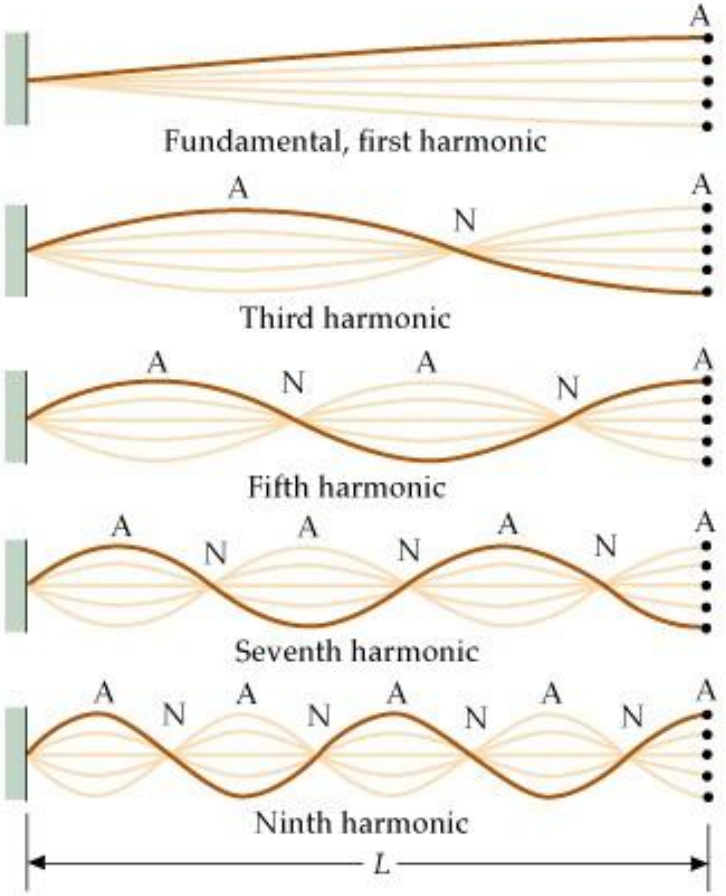
$$\Rightarrow kL = n\frac{\pi}{2}$$

$$\lambda_n = \frac{4L}{n} \qquad n = 1, 3, 5\ldots$$

$$f_n = n\frac{v}{4L}$$



$$f_1 = \frac{v}{4L}$$



Resumen

- Ondas transversales: la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación; ondas longitudinales: la perturbación tiene la dirección de la perturbación.
- Ecuación de ondas $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$
- La velocidad de propagación depende de las características físicas del medio
- Función de ondas $y = f(x \pm vt) = f(kx \pm \omega t)$
- Función de onda armónica $y = y_0 \cos(x \pm vt) = y_0 \cos(kx \pm \omega t)$
- Potencia y densidad de energía de una onda armónica en una cuerda

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\mu}{2} v (y_0 \omega)^2 \qquad \eta = \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\mu}{2} (y_0 \omega)^2$$

- Atenuación de la energía y de la amplitud $\eta = \eta_0 e^{-\beta x}$ $y_0(x) = y_0(0) e^{-\beta x/2}$
- Reflexión y refracción: cuando una onda incide sobre una superficie que separa dos regiones de diferente velocidad, una parte de la onda se refleja y otra parte se trasmite. Las ondas trasmitida y reflejada tienen la misma frecuencia que la onda incidente. La onda reflejada tiene la misma λ que la onda incidente, la onda trasmitida tiene $\neq\lambda$.
- Los coeficientes de reflexión y transmisión en amplitud son $r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$ $t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$

Ejercicios

Calcular cuál es la velocidad de propagación en una cuerda de 3m de longitud fijada por sus dos extremos sabiendo que la frecuencia del tercer armónico es de 60Hz.
Respuesta: 120 m/s

En una cuerda tensa dispuesta horizontalmente uno de sus extremos está fijado a la pared, mientras el otro pasa por una polea y se cuelga una masa m. En la cuerda se producen ondas estacionarias. ¿Qué masa m' se ha de añadir a la m inicial si queremos que la frecuencia del sexto armónico sea ahora igual a la frecuencia del séptimo armónico de antes?
Respuesta: m' = (13 / 36)m

Una cuerda fijada por los dos extremos tiene una longitud de 40cm y una masa de 8g. Sabemos que esta cuerda entra en resonancia a las frecuencias de 424Hz y de 530Hz sin que entre en resonancia a ninguna frecuencia intermedia.
¿Cuánto vale la tensión a la que está sometida la cuerda?
Respuesta: 143.82 N