

Modulo I: Oscilaciones (9 hs)

1. Movimiento Armónico Simple (MAS)
- 2. Oscilaciones Amortiguadas**
3. Oscilaciones forzadas y resonancia
4. Superposición de MAS

2.1 Fuerza de fricción viscosa

2.2 Oscilaciones armónicas amortiguadas

2.3 Tipos de amortiguamiento

2.4 Oscilaciones débilmente amortiguadas

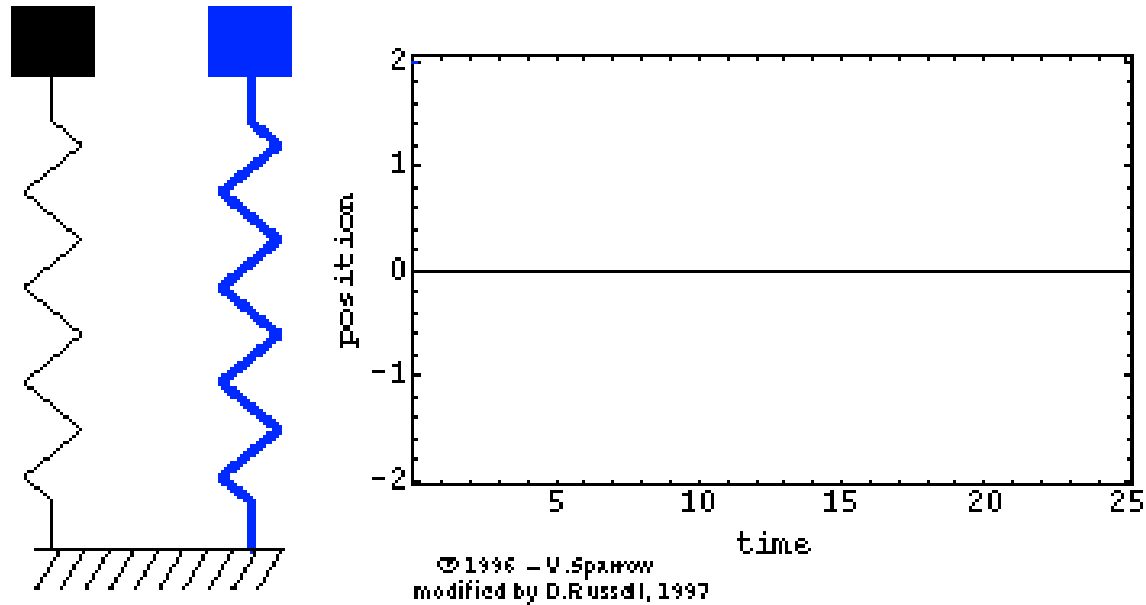
2.5 Energía de las oscilaciones amortiguadas

2.6 Factor de calidad

Bibliografía: Tipler y Mosca, Capítulo 14

Oscilaciones amortiguadas

Fuerzas disipativas (rozamiento) producen el amortiguamiento de las oscilaciones



2.1 Fuerza de fricción viscosa

Es proporcional y opuesta a la velocidad:

$$F = -bv$$

b = coeficiente de fricción viscosa

(constante de amortiguamiento) $[b]$: kg/s

¿Cómo se mueve una partícula bajo la acción de una fuerza de fricción viscosa?

$$F = ma \Rightarrow -bv = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{b}{m} dt = \frac{dv}{v}$$

$$-\frac{b}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} \Rightarrow -\frac{b}{m} t = \ln \frac{v}{v_0} \Rightarrow v = v_0 e^{-(b/m)t}$$

La velocidad decrece exponencialmente con el tiempo.

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m (v_0 e^{-(b/m)t})^2 \quad (e^{-x})^2 = e^{-2x} \Rightarrow$$

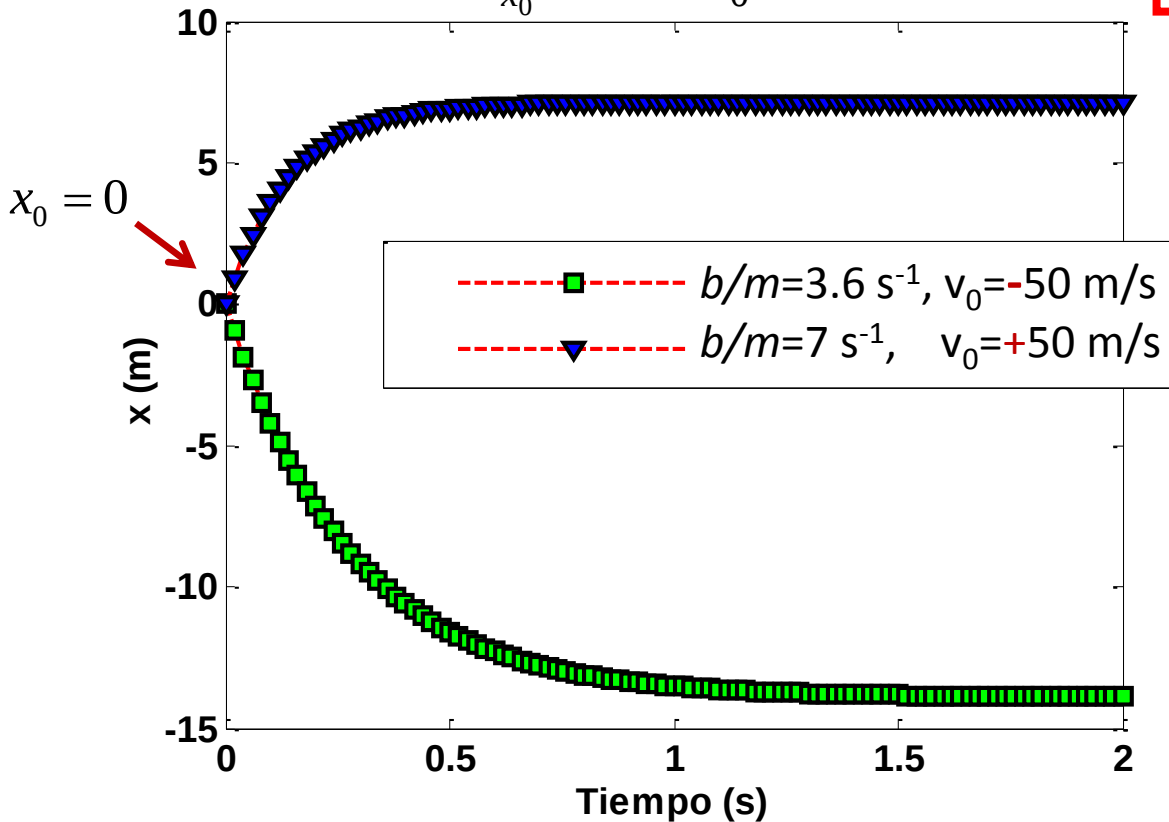
$$K = K_0 e^{-2(b/m)t}$$

La energía cinética también decrece exponencialmente con el tiempo (y más rápido que v).

Unidades $[b/m]$: 1/s

Movimiento bajo la acción de una fuerza de fricción viscosa

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-bt/m} \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = v_0 \int_0^t e^{-bt/m} dt \Rightarrow x = x_0 + v_0 \frac{m}{b} (1 - e^{-(b/m)t})$$



A mayor b/m : el movimiento se amortigua más rápidamente.

La partícula eventualmente se detiene:

$$t \rightarrow \infty \quad e^{-(b/m)t} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow x_0 + v_0 \frac{m}{b}$$

$$v = v_0 e^{-(b/m)t} \rightarrow 0$$

$$K = K_0 e^{-2(b/m)t} \rightarrow 0$$

2.2 Oscilaciones armónicas amortiguadas

Cuando una partícula esta sujeta a la acción de dos fuerzas: **1) viscosa y 2) elástica** la ecuación del movimiento es:

$$\sum F_i = ma \Rightarrow \underbrace{-bv}_{\text{viscosa}} - \underbrace{kx}_{\text{elástica}} = ma \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria de 2º orden lineal y homogénea

Frecuencia angular natural del sistema:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

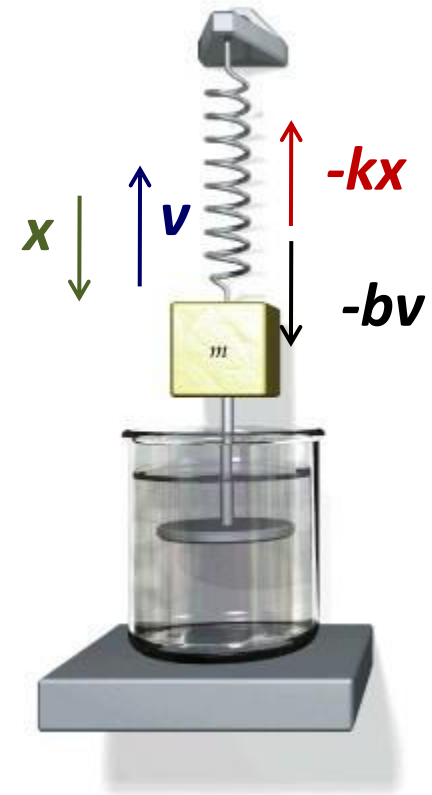
β : Parámetro de amortiguamiento.

Unidades $[\beta]$: 1/s

b : Constante de amortiguamiento ($F_{\text{viscosa}} = -bv$)

Unidades $[b]$: kg/s

$$\beta = \frac{b}{2m}$$



Solución de la ecuación diferencial si $\beta < \omega_0$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

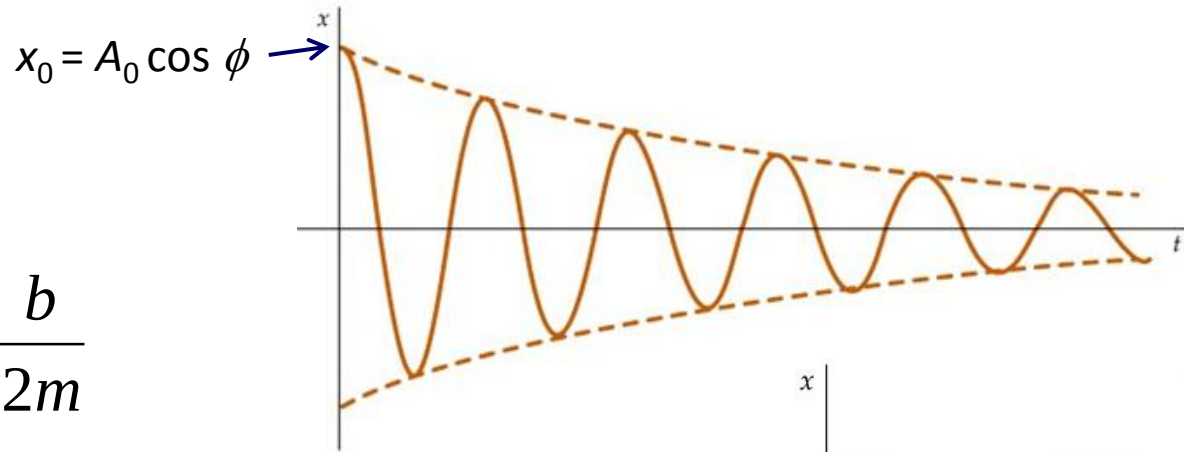
- Si $\beta < \omega_0$ la solución es

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_1 t + \phi)$$

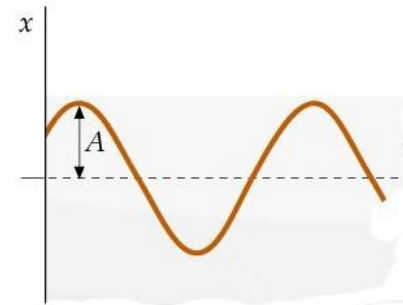
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \beta = \frac{b}{2m}$$



- Si $\beta=0$: MAS de frecuencia angular ω_0 : $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$



- ω_1 : frecuencia angular del movimiento
- ω_0 : frecuencia angular *natural* del sistema (frecuencia con que oscilaría si no hubiera amortiguación)

2.3 Tipos de amortiguamiento

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

1) Débil

$$\beta < \omega_0$$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

2) Crítico

$$\beta = \omega_0$$

$$x(t) = (A_0 + B_0 t) e^{-\beta t}$$

3) Sobre-amortiguado

$$\beta > \omega_0$$

$$x(t) = (A_0 e^{-\omega'_1 t} + B_0 e^{+\omega'_1 t}) e^{-\beta t}$$

$$\omega'_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

A_0 y B_0 son dos constantes que se pueden calcular a partir de las condiciones iniciales (x_0 y v_0)

1) Débil

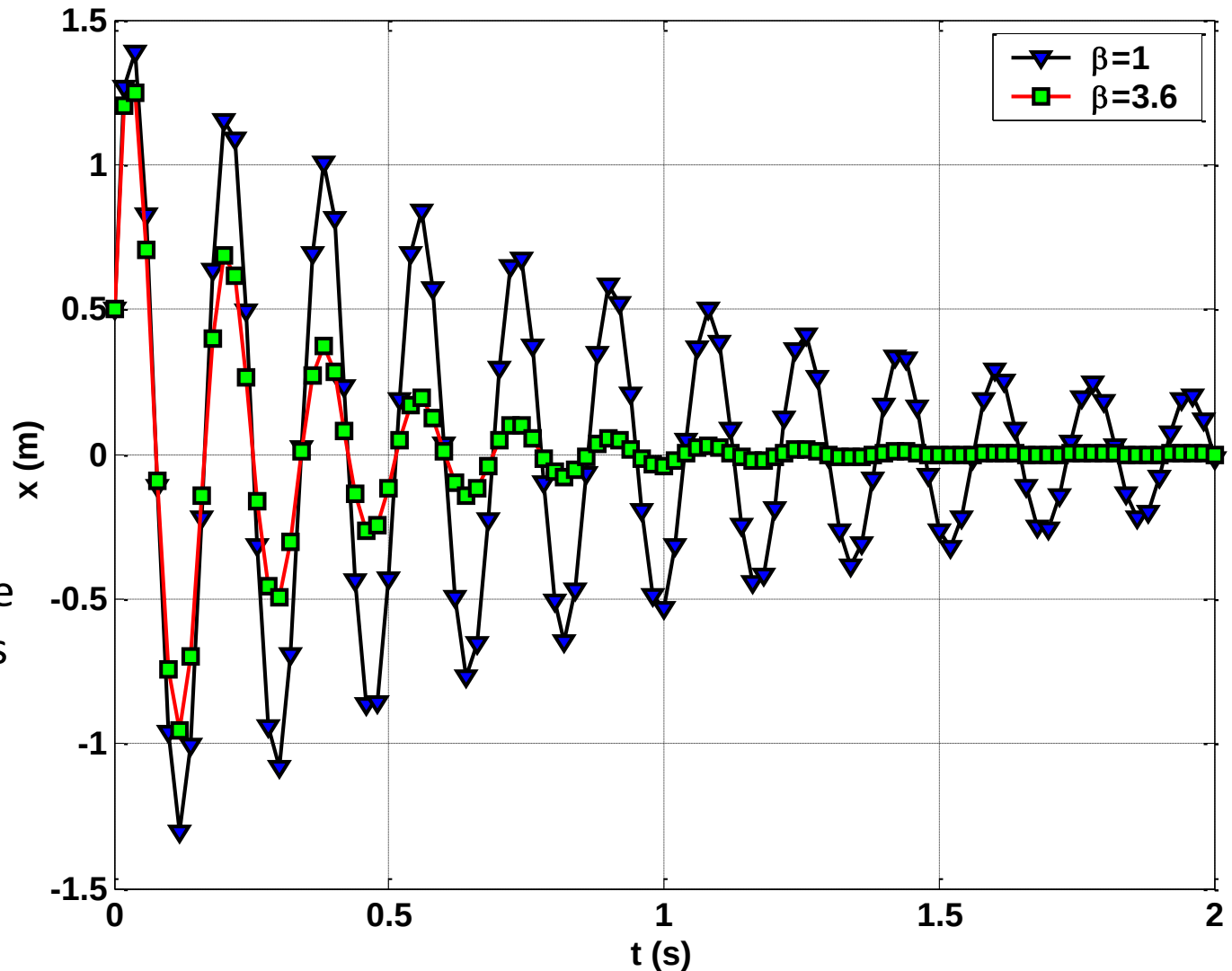
$$\beta < \omega_0$$

$$\omega_0 = 36 \text{ rad s}^{-1}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 0.17$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

La oscilación se amortigua más rápidamente para mayor β

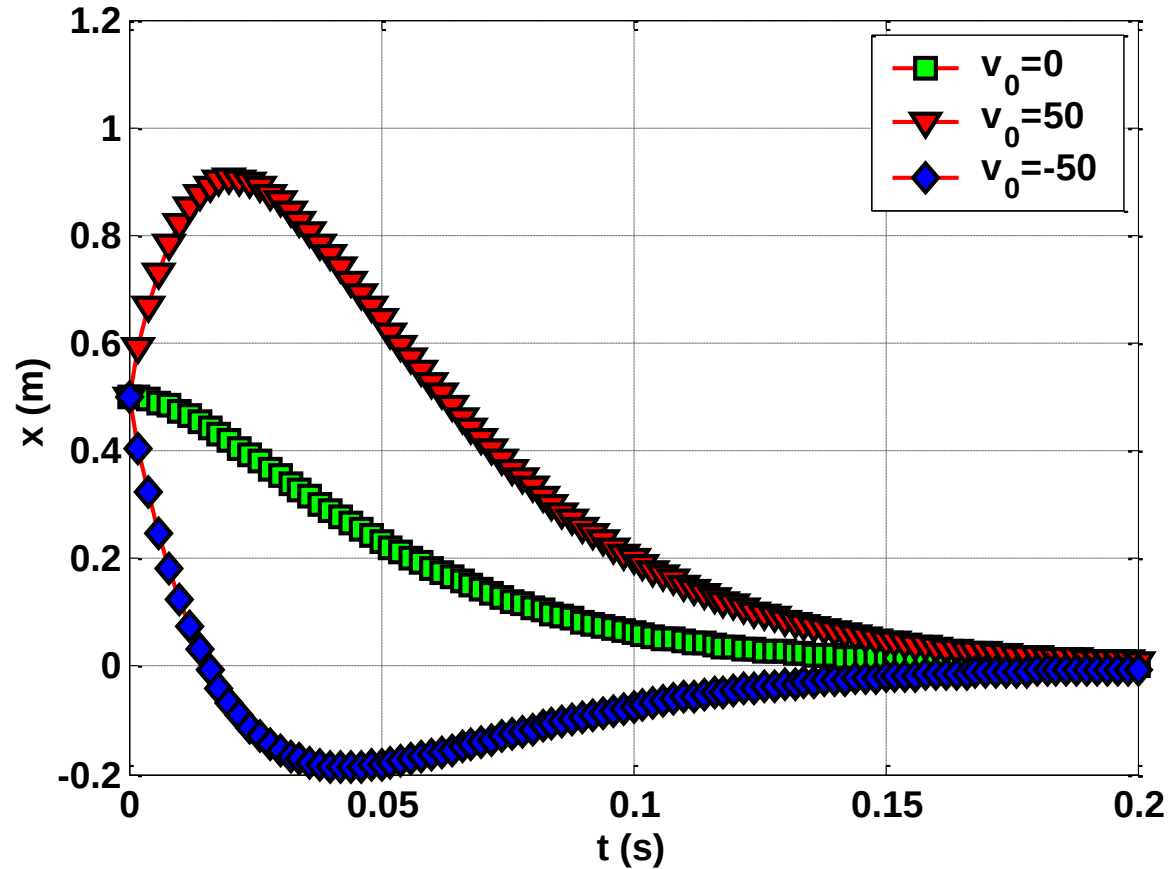


2) crítico

$$\beta = \omega_0$$

$$\omega_0 = 36 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\beta = 36 \text{ s}^{-1}$$

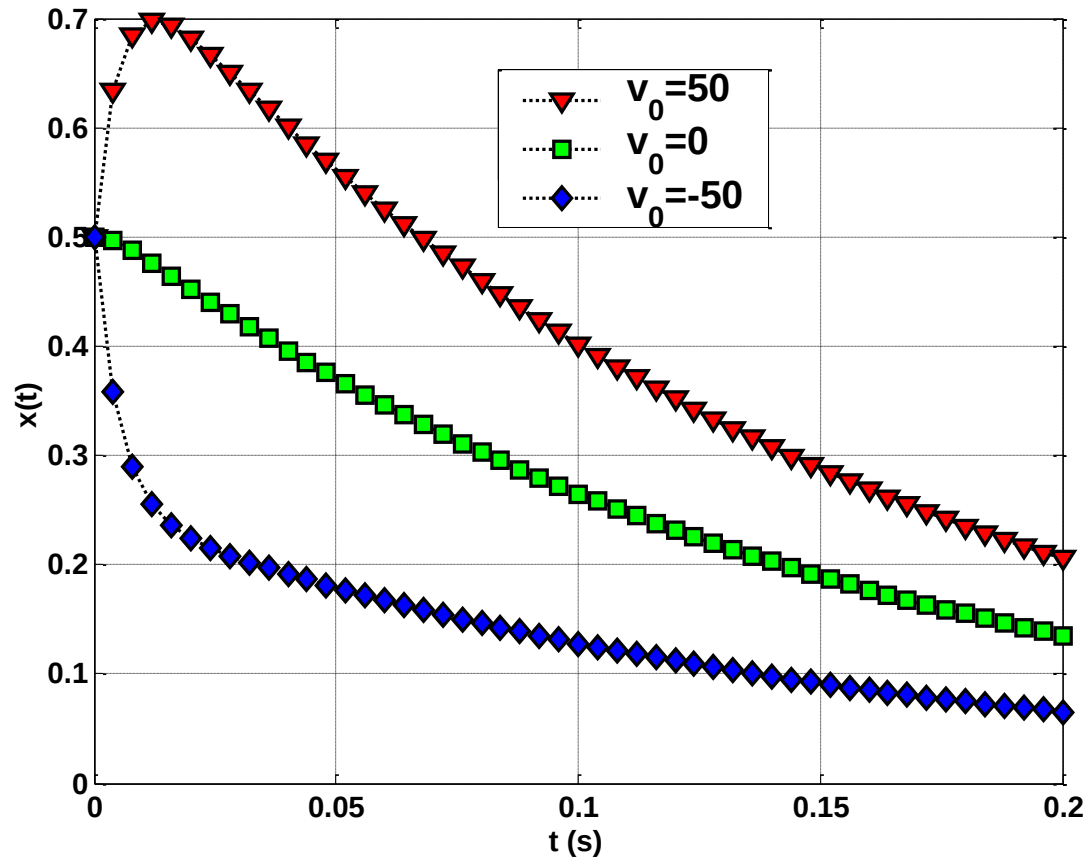


3) sobre amortiguado

$$\beta > \omega_0$$

$$\omega_0 = 36 \text{ rad s}^{-1}$$

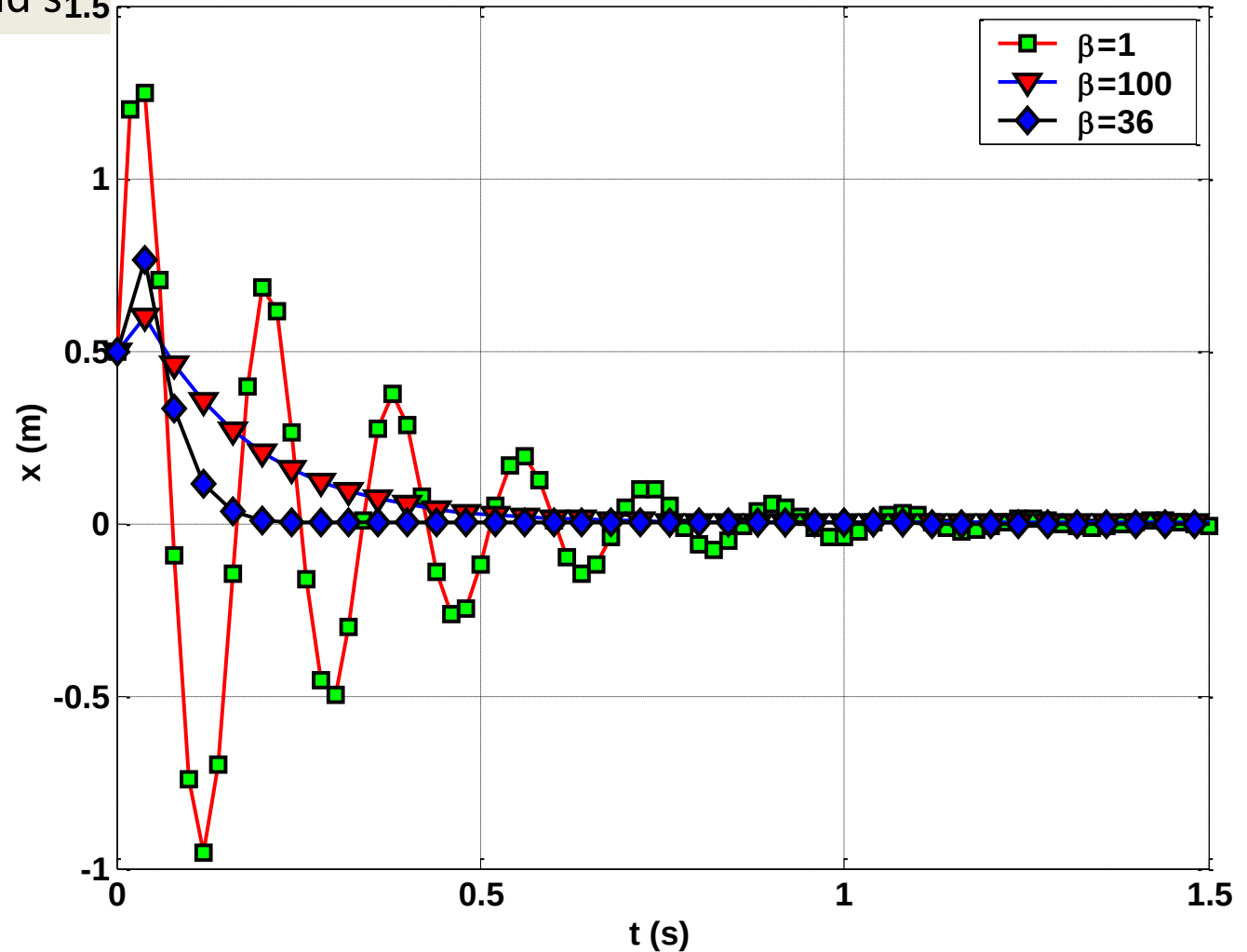
$$\beta = 100 \text{ s}^{-1}$$



Comparación

$$\omega_0 = 36 \text{ rad s}^{-1}$$

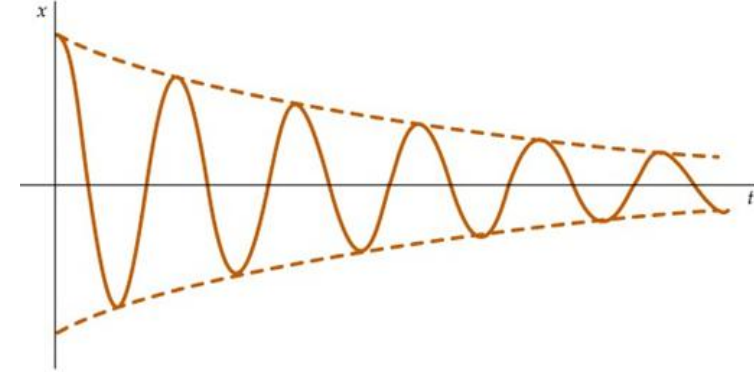
Para las mismas condiciones iniciales oscilación se amortigua más rápidamente cuando el amortiguamiento es crítico.



2.4 Oscilaciones débilmente amortiguadas

- Si $\beta < \omega_0$ la oscilación es débilmente amortiguada

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$



Características del movimiento:

- No** es un movimiento periódico.
- Pero: si $\beta \ll \omega_0$ es “casi” un MAS y podemos aproximar $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0$
- El “período” del movimiento es: $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$
- La “amplitud” efectiva es: $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$
- El “período” no depende de la amplitud.
- La pérdida relativa de amplitud por periodo es: $p = \frac{A(t) - A(t+T)}{A(t)} = 1 - e^{-\beta T}$

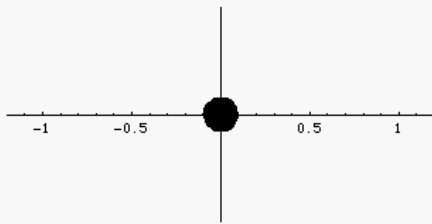
Ejercicio: sabiendo que la frecuencia angular de un oscilador amortiguado es el 95% de su frecuencia propia, ¿en qué % se reducirá la amplitud en cada oscilación?

Solución: se reduce en un 12.7%, $A(t+T)=0.127A(t)$

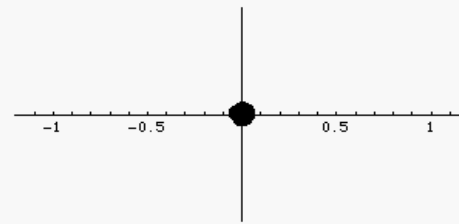
Espacio de fase (posición, velocidad)

MAS

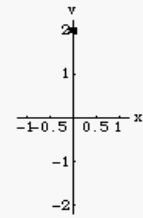
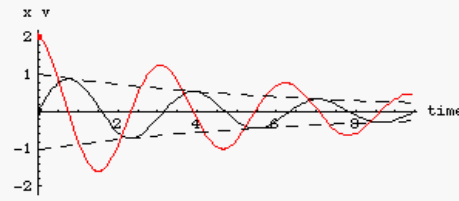
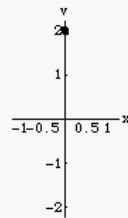
MAS amortiguado



© 2007, Daniel A. Russell



© 2007, Daniel A. Russell



$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

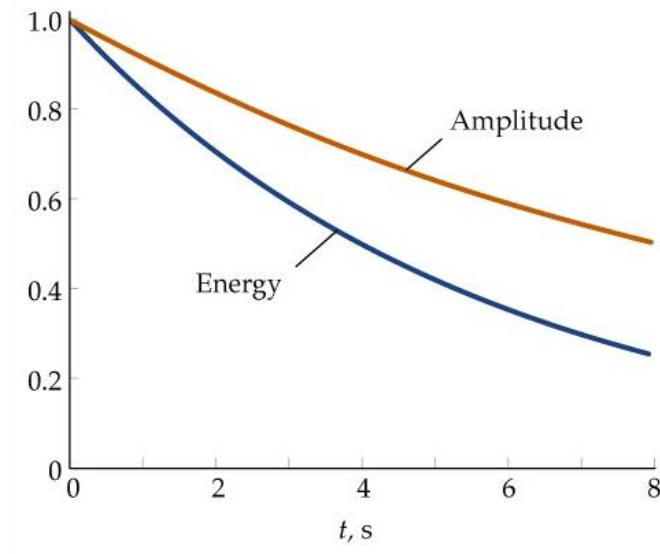
2.5 Energía de las oscilaciones amortiguadas

- Potencia disipada $P(t) = F_v \cdot v = -bv^2$
- Podemos calcular la variación de la energía $P = \frac{dE}{dt} \Rightarrow E(t) - E_0 = -\int_0^t bv^2 dt$
- Haciendo la integral $E(t) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 e^{-2\beta t} [1 + 2\beta \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t) + \frac{2\beta^2}{\omega_1^2} \cos^2(\omega_1 t)]$
- Si el movimiento es débilmente amortiguado (“casi MAS”): $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k A(t)^2 = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

Energía inicial: $E_0 = \frac{1}{2} k A_0^2$

Constante de tiempo
(o tiempo de relajación) $\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{b}$



2.6 Factor de calidad

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Si el amortiguamiento es muy débil: $\begin{cases} \beta \ll \omega_0 \\ E(t) = E_0 e^{-2\beta t} \end{cases}$

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{E_0 e^{-2\beta t} - E_0 e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi \frac{E_0}{E_0 - E_0 e^{-2\beta T}}$$

Constante de tiempo
(o tiempo de relajación)

$$\beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega_1} \underbrace{\omega_1 \approx \omega_0}_{\approx} 2\pi \frac{\beta}{\omega_0} \underbrace{\beta \ll \omega_0}_{\ll} 1 \Rightarrow e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T \quad \underbrace{\tau = 1/(2\beta)}$$

$$\Rightarrow Q \approx 2\pi \frac{1}{2\beta T} = 2\pi \frac{1}{2\beta \frac{2\pi}{\omega_1}} \Rightarrow Q = \frac{\omega_1}{2\beta} = \omega_1 \tau \approx \omega_0 \tau$$

Resumen

- El movimiento amortiguado ocurre en las oscilaciones reales y es causado por fuerzas de fricción.
- Si el amortiguamiento es mayor que un cierto valor critico el sistema no oscila cuando regresa a su posición de equilibrio.
- Si el oscilador esta débilmente amortiguado el movimiento es casi un MAS con amplitud que disminuye exponencialmente con el tiempo.

▪ Débilmente amortiguado	$\beta < \omega_0$	$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$ $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$
si:	$\beta \ll \omega_0$	$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \phi)$ $\omega_1 \approx \omega_0$
▪ Críticamente amortiguado	$\beta = \omega_0$	$x = (A_0 + B_0 t) e^{-\beta t}$
▪ Sobre-amortiguado	$\beta > \omega_0$	$x = (A_0 e^{-\omega'_1 t} + B_0 e^{+\omega'_1 t}) e^{-\beta t}$ $\omega'_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Problema 16

Una partícula de masa m esta unida a un muelle de constate k y todo ello dispuesto en un plano horizontal. El muelle se estira respecto a su posición de equilibrio una longitud A_0 y se suelta por lo que la partícula comienza a oscilar. La mesa ejerce una fuerza de *rozamiento seco* sobre la partícula determinada por el coeficiente de rozamiento μ . Despreciando la resistencia del aire calcular la diferencia de amplitudes entre dos oscilaciones consecutivas. ¿en que condiciones se detendrá la partícula?

Solución: $\Delta A = 4\mu mg / k$

Problema 22

Dos cuerpos unidos entre si de masas M y m están en equilibrio colgados del techo mediante un muelle de constante k . En un determinado instante se retira el cuerpo de masa m por lo que el cuerpo M empieza a oscilar, realizando oscilaciones amortiguadas por el rozamiento con el aire. Se pide:

- Energía con la que empieza a oscilar el cuerpo.
- Perdida relativa de energía (q) en función de la pérdida relativa de amplitud (p).
- Si $M=100\text{g}$, $m=30\text{g}$, $k=25\text{N/m}$, $p=1.5\%$, determinar el tiempo necesario para que la energía sea la cuarta parte del valor inicial.

Solución: $E_0 = m^2 g^2 / (2k)$, $q = 2p - p^2$, $t = 18.22 \text{ s}$

Preguntas VF

1. En un oscilador armónico amortiguado la energía decrece describiendo oscilaciones de amplitud decreciente.
2. La energía de un oscilador muy débilmente amortiguado es proporcional al cuadrado de su amplitud efectiva.
3. El parámetro de amortiguamiento tiene las mismas unidades que la constante de amortiguamiento.
4. Si $\omega_0 < \beta$ la partícula se aproximará a la posición de equilibrio sin realizar oscilaciones y en el menor tiempo posible.
5. El factor de calidad es una magnitud que sólo está definida para el movimiento débilmente amortiguado.
6. La energía de un oscilador débilmente amortiguado decrece exponencialmente con el tiempo.
7. Los amortiguadores de un coche son un ejemplo de sistema débilmente amortiguado.
8. El periodo de un oscilador débilmente amortiguado aumenta a medida que la partícula pierde velocidad.