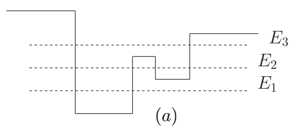
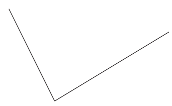
Práctico 2: Pozos y Barreras

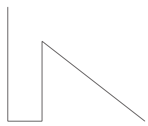
1. Calcule la integral:
   $I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha^2(z+\beta)} dz$
   Muestre que, para $Re(\alpha^2) > 0$
   1. $I(\alpha,\beta) = I(\alpha, 0)$
   2. si $Re(\alpha^2) > 0$ siempre se puede encontrar α tal que $-\pi/4 < Arg(\alpha) < \pi/4$, y entonces $I(\alpha,\beta) = \sqrt{\pi}/\alpha$.

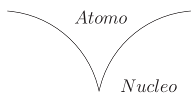
2. * Dibuje los diagramas cualitativos de las funciones de onda de distintas energías para cada uno de los potenciales que se muestran a continuación:



(a)


(b)*Enlace ionico*


(c)*Desintegracion nuclear alfa*



(d)

3. * Considere una partícula de masa m en el potencial $V(x) = 0$ si $0 \le x \le a$ y $V(x) = +\infty$ en el resto del eje real. $\mid \phi_n >$ son autoestados del Hamiltoniano H del sistema, y sus autovalores son $E_n = \frac{n^2\,\pi^2\,\hbar^2}{2\,m\,a^2}$. El estado de la partícula en el instante $t = 0$ es:

$$\mid \psi(0) >= a_1 \mid \phi_1 > +a_2 \mid \phi_2 > +a_3 \mid \phi_3 > +a_4 \mid \phi_4 > \tag{1}$$

   a) Cuál es la probabilidad, cuando se mide la energía de la partícula en el estado $\mid \psi(0) >$, de encontrar un valor menor que $\frac{3\,\pi^2\,\hbar^2}{m\,a^2}$?

   b) Cuál es el valor medio y cuál es la desviación cuadrática media de la energía de la partícula en el estado $\mid \psi(0) >$?

   c) Calcular el vector de estado $\mid \psi(t) >$ en el instante t. Son los resultados encontrados en a) y b) en el instante $t = 0$ válidos en un tiempo arbitrario t ?

   d) Cuando se mide la energía, se encuentra el resultado $\frac{8\,\pi^2\,\hbar^2}{m\,a^2}$. Luego de realizada la medición cuál es el estado del sistema ?. Cuál es el resultado si se mide nuevamente la energía ?

4. Una partícula de masa m se mueve en un potencial unidimensional dado por $W(x) = -W$ si $\mid x \mid< a$ y 0 en el resto del eje real, donde W es una constante positiva.

a) Mostrar que para un estado ligado de energía E se satisfacen las relaciones $\tan(j\,a) = \gamma/j$ para un estado de paridad par y $\cot(j\,a) = -\gamma/j$ para un estado de paridad impar, donde $j^2 = 2\,m\,(E+W)/\hbar^2$ y $\gamma^2 = -2\,m\,E/\hbar^2$.

b) Diseñe un método gráfico para determinar los valores de E, y mostrar que, cualesquiera sean los valores de W y a, hay por lo menos un estado ligado.

c) Si la partícula es un electrón y $W = 10\,eV$, $a = 4\times 10^{-10}m$, cuántos estados ligados hay ? Dibuje la función de onda para los dos estados ligados de menor energía.

5. Un haz de partículas de masa m y energía E se encuentra con un potencial escalón de altura $W < E$.

   a) Mostrar que la fracción reflejada es $\mathcal{R} = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2$, donde $\mu = j/k$, $k^2 = 2\,m\,E/\hbar^2$ y $j^2 = 2\,m\,(E-W)/\hbar^2$.

   b) Mostrar que la suma de los flujos de los haces reflejado y transmitido es igual al flujo de partículas incidentes.

6. Considere el último problema para el caso $E < W$. Llamemos $k^2 = 2\,m\,E/\hbar^2$ y $\gamma^2 = 2\,m\,(E-W)/\hbar^2$. Si las partículas incidentes están representadas por $\exp(\imath\,k\,x)$, mostrar que

   a) Las partículas reflejadas están representadas por $\exp(-\imath(k\,x+2\,\theta))$, donde $\tan\theta = \gamma/k$.

   b) La amplitud de la función de ondas es $2\,cos(k\,x+\theta)$ en la región donde el potencial es 0 $(x<0)$, y 2 $\cos\theta\,\exp(-\gamma\,x)$ en la región donde el potencial es W $(x>0)$.

   c) Cuál es el flujo de i) las partículas incidentes, ii) las partículas reflejadas y las partículas en $x > 0$.

7. Un haz de partículas de masa m y energía E incide en una barrera de potencial dada por $V(x) = 0$ para $x < 0$, $a < x$ y $V(x) = W$ para $0 < x < a$ donde $W > E$. Mostrar que la fracción transmitida a la región $x > 0$ es $\mathcal{T} = \left(1 + \frac{W^2}{4E(W-E)}\sinh^2\gamma\,a\right)^{-1}$, donde $\gamma^2 = 2\,m\,(W-E)/\hbar^2$.

   [Notación: $u_1 = \exp(\imath\,k\,x) + R\,\exp(-\imath\,k\,x)$, $u_2 = A\,\exp(\gamma\,x) + B\,\exp(-\gamma\,x)$, $u_3 = T\,\exp(\imath\,k\,x)$, $k^2 = 2\,m\,E/\hbar^2$, $\rho = \gamma/k$].

8. * a) Si el potencial en el último problema es una función δ, o sea $W \to \infty$ y $a \to 0$ de tal forma que $Wa = b$, donde b es constante, mostrar que $\mathcal{T} = \left(1 + \frac{m\,b^2}{2\,\hbar^2\,E}\right)^{-1}$.

   b) Calcule la energía de ligadura de una partícula en un potencial de función delta de Dirac.

9. * En un rectificador ideal de estado sólido la corriente eléctrica no fluye en uno de los dos sentidos debido a la barrera de potencial que ofrecen los electrones. Calcúlese el valor aproximado de la correspondiente probabilidad de penetración de la barrera para un electrón que tiene una energía cinética de 2,5 voltios incidiendo sobre una barrera rectangular de 3 voltios de altura y 10^{-7} cm de ancho.

10. * Una bola de masa m desliza sin fricción sobre un alambre tirante de longitud a entre dos paredes rígidas.

    a) Cuáles son los niveles de energía del sistema?

    b) Demuéstrese explícitamente que las funciones de onda correspondientes a las diferentes energías son ortogonales.

c) Calcúlense las probabilidades de que estén ocupados los diversos estados de energía si una medida indica que la bola está exactamente en el medio el alambre.

Una medida posterior indica que la bola no se encuentra en la mitad derecha del alambre.

d) Cuál es la energía media más baja $< H >$ compatible con esta medida?

e) Cuál es la función de onda correspondiente?

f) Para el sistema en este estado de energía media más baja, cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en su estado de energía más baja?