Práctico 3: Postulados

1. Considere el Hamiltoniano H de una partícula en un problema unidimensional definido como:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X) \tag{1}$$

donde X y P son los operadores que satisfacen la relación $[X, P] = \imath\hbar$. Los autovectores de H se expresan como: $H \mid \phi_n >= E_n \mid \phi_n >$, donde n es un índice discreto.

a) Muestre que:

$$< \phi_n \mid P \mid \phi_{n'} >= \alpha < \phi_n \mid X \mid \phi_{n'} > \tag{2}$$

donde α es un coeficiente que depende de la diferencia entre E_n y $E_{n'}$. Calcular α (sugerencia: considerar el conmutador $[X, H]$).

b) De este resultado en a) deduzca usando la relación de clausura, la ecuación:

$$\sum_{n'} (E_n - E_{n'})^2 \ |< \phi_n \mid X \mid \phi_{n'} >|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} < \phi_n \mid P^2 \mid \phi_n > \tag{3}$$

2. *a)* Considere un sistema físico cuyo espacio de estados tridimensional está constituído por la base ortonormal formada por los tres kets $\mid u_1 > \mid u_2 > \mid u_3 >$. En la base de estos tres vectores tomados en ese orden, los dos operadores H y B están definidos por:

$$H = \hbar\,\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde ω_0 y b son constantes reales.

b) Son H y B hermitianos ?.

c) Mostrar que H y B conmutan. Dar una base de autovectores comunes a H y B.

d) De los conjuntos de operadores $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H, B\}$, $\{H^2, B\}$, cuales constituyen un C.C.O.C. ?.

e) En el mismo espacio de estados considerar dos operadores L_z y S definidos como:

$$\begin{array}{lll} L_z \mid u_1 >=\mid u_1 > & L_z \mid u_2 >= 0 & L_z \mid u_3 >= - \mid u_3 > \\ S \mid u_1 >=\mid u_3 > & S \mid u_2 >=\mid u_2 > & S \mid u_3 >=\mid u_1 > \end{array}$$

f) Escriba las matrices que representan, en la base $\{\mid u_1 > \mid u_2 > \mid u_3 >\}$ los operadores L_z, L_z^2, S, S^2. Son estos operadores observables ?.

g) Dar la forma de la matriz mas general que representa a un operador que conmuta con L_z. El mismo problema para L_z^2 y S^2.

h) L_z^2 y S^2 forman un C.C.O.C ?. Dar una base de autovectores comunes.

3. La función de onda de una partícula libre, en un problema unidimensional, está dada en el instante $t = 0$ por:

$$\psi(x, 0) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \exp(- \mid k \mid / k_0) \exp(\imath k x) \tag{4}$$

donde k_0 y N son constantes.

a) Cuál es la probabilidad $\mathcal{P}(p_1, 0)$ de que una medida del momento realizada en el instante $t = 0$ producirá un resultado incluído entre $-p_1$ y $+p_1$?. Dibujar la función $\mathcal{P}(p_1, 0)$.

b) Que ocurre con esta probabilidad $\mathcal{P}(p_1, 0)$ si la medida se realiza en el instante t ?. Interprete.

c) Cuál es la forma del paquete de ondas en el instante $t = 0$?. Calcular en ese instante el producto $\Delta X . \Delta P$; cuál es su conclusión ?. Describa cualitativamente la subsecuente evolución del paquete.

4. En un problema unidimensional, considere una partícula de energía potencial $V(X) = -f\,X$, donde f es una constante positiva ($V(X)$ surge, por ejemplo, de un campo gravitacional o un campo eléctrico uniforme).

a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y del momento P de la partícula. Integre estas ecuaciones; compare con el movimiento clásico.

b) Mostrar que la desviación cuadrática media ΔP no cambia con el tiempo.

c) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación $\mid p >$. Deduzca de ella la relación entre $\frac{\partial}{\partial t} \; |< p \mid \psi(t) >|^2$ y $\frac{\partial}{\partial p} \; |< p \mid \psi(t) >|^2$. Integre la ecuación obtenida, dele una interpretación física.

5. En un problema unidimensional, considerar un sistema de dos partículas (1) y (2) con las que se asocia la función de onda $\psi(x_1, x_2)$.

a) Cuál es la probabilidad de encontrar, en una medida de las posiciones X_1 y X_2 de las dos partículas, un resultado tal que:

$$x \leq x_1 \leq x + dx \tag{5}$$

$$\alpha \leq x_2 \leq \beta \tag{6}$$

b) Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula (1) entre x y $x + dx$ cuando no se han hecho observaciones de la partícula (2) ?.

c) Dé la probabilidad de encontrar por lo menos una de las partículas entre α y β.

d) Dé la probabilidad de encontrar una y solo una de las partículas entre α y β.

e) Cuál es la probabilidad de encontrar el momento de la partícula (1) entre p' y p'', y la posición de la partícula (2) entre α y β ?.

f) Los momentos P_1 y P_2 de las dos partículas son medidos; cuál es la probabilidad de encontrar $p' \leq p_1 \leq p^{''}$; $p^{'''} \leq p_2 \leq p^{''''}$?.

g) La única cantidad que se mide es el momento P_1 de la primer partícula. Calcular, primero de los resultados de e) y luego de los de f), la probabilidad de encontrar este momento entre p' y $p^{''}$. Compare los dos resultados obtenidos.

h) La distancia algebraica $X_1 - X_2$ entre dos partículas es medida. Cuál es la probabilidad de encontrar el resultado entre $-d$ y d ?. Cuál es el valor medio de esta distancia ?.

6. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados que es tridimensional, esté constituído por una base ortonormal formada por tres kets $\mid u_1 > \mid u_2 > \mid u_3 >$. En esta base, el operador Hamiltoniano H del sistema y los dos observables A y B se escriben:

$$H = \hbar\,\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde ω_0, a y b son constantes reales positivas. El estado físico en el instante $t = 0$ está en el estado:

$$\mid \psi(0) >= \frac{1}{\sqrt{2}} \mid u_1 > + \frac{1}{2} \mid u_2 > + \frac{1}{2} \mid u_3 > \tag{7}$$

a) En el instante $t = 0$, la energía del sistema es medida. Que valores se pueden encontrar, y con que probabilidades ?. Calcular, para el sistema en el estado $\mid \psi(0) >$, el valor medio $< H >$ y la desviación cuadrática media ΔH.

b) En vez de medir H en el instante $t = 0$, se mide A; que resultados se pueden encontrar y cuales son sus probabilidades ?. Cuál es el vector de estado inmediatamente luego de la medición ?.

c) Calcular el vector de estado $\mid \psi(t) >$ del sistema en el instante t.

d) Calcular los valores medios $< A > (t)$ y $< B > (t)$ de A y B en el instante t. Qué comentarios se pueden hacer ?.

e) Qué resultados se obtienen si el observable A es medido en el instante t ?. La misma pregunta para el observable B. Interprete.

7. Considere un sistema físico arbitrario. Llame al Hamiltoniano $H_0(t)$ y al correspondiente operador de evolución $U_0(t, t')$:

$$\imath\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_0(t, t_0) = H_0(t)\, U_0(t, t_0) \tag{8}$$

$$U_0(t_0, t_0) = 1 \tag{9}$$

Asuma que el sistema es perturbado de tal forma que su Hamiltoniano resulta $H(t) = H_0(t) + W(t)$. El vector de estado del sistema en la imagen de interacción, $\mid \psi_I(t) >$, es definido a partir del vector de estado $\mid \psi_S(t) >$, en la imagen de Schrödinger como:

$$\mid \psi_I(t) >= U_0^\dagger(t, t_0) \mid \psi_S(t) > \tag{10}$$

a) Mostrar que la evolución de $\mid \psi_I(t) >$, está dada por:

$$\imath\hbar \frac{d}{dt} \mid \psi_I(t) >= W_I(t) \mid \psi_I(t) > \tag{11}$$

donde $W_I(t)$ es el operador transformado de $W(t)$ bajo la transformación unitaria asociada con $U_0^\dagger(t, t_0)$:

$$W_I(t) = U_0^\dagger(t,t_0)\, W(t)\, U_0(t,t_0) \tag{12}$$

Explicar cualitativamente porque, cuando la perturbación $W_I(t)$ es mucho menor que $H_0(t)$, el movimiento del vector $\mid \psi_I(t) >$ es mas lento que el de $\mid \psi_S(t) >$.

b) Mostrar que la precedente ecuación diferencial es equivalente a la ecuación integral:

$$\mid \psi_I(t) >=\mid \psi_I(t_0) > + \frac{1}{\imath\,\hbar} \int_{t_0}^{t} dt'\, W_I(t')\ \mid \psi_I(t') > \tag{13}$$

donde: $\mid \psi_I(t_0) >=\mid \psi_S(t_0) >$.

c) Al resolver esta ecuación integral por iteración, mostrar que el ket $\mid \psi_I(t) >$ se puede expandir en serie de potencias en W de la forma:

$$\mid \psi_I(t) >= \left(1 + \frac{1}{\imath\,\hbar} \int_{t_0}^{t} dt'\, W_I(t') + \frac{1}{(\imath\,\hbar)^2} \int_{t_0}^{t} dt'\, W_I(t') \int_{t_0}^{t'} dt^{''}\, W_I(t^{''}) + \cdots \right) \mid \psi_I(t_0) > \tag{14}$$

8. El Hamiltoniano del oscilador armónico es $H = (p^2 + m^2\,\omega^2\,q^2)/2m$. Mostrar que los valores medios $< q >$, $< p >$ realizan oscilaciones sinusoidales de frecuencia $\omega/2\pi$ alrededor del origen. Mostrar que los cuadrados de las desviaciones ϖ, χ oscilan sinusoidalmente con la mitad del período alrededor de un valor promedio y calcularlo. En que condiciones ϖ y χ permanecen constantes ?.

9. Por definición, un proyector P_i es menor que o igual que otro proyector P_j si $P_i\, P_j = P_i$; luego se usa la notación $P_i \leq P_j$. Mostrar que si $P_i \leq P_j$, se tiene necesariamente $< u \mid P_i \mid u > \leq < u \mid P_i \mid u >$ para cualquier $\mid u >$, y viceversa. Mostrar directamente o usando esta última propiedad, que la desigualdad asi definida satisface los axiomas característicos de una desigualdad i) $P_i \leq P_j$ y $P_j \leq P_i$ implican $P_i = P_j$; ii) $P_i \leq P_j$ y $P_j \leq P_k$ implican $P_i \leq P_k$.

10. Si $P_1, P_2, \cdots, P_k$ son proyectores, mostrar que su suma es también un proyector si y solo si,

$$\sum_{i=1}^{k} < u \mid P_i \mid u > \leq < u \mid P_i \mid u > \tag{15}$$

para cualquier vector $\mid u >$ del espacio de Hilbert.

11. Comenzando desde el postulado sobre valores medios, derive la expresión,

$$\omega_D = \frac{< u_D \mid u_D >}{< u \mid u >} \tag{16}$$

la que da la probabilidad para los resultados de medida de una dada cantidad.