Práctico 3: Algebra

1. *a)* Haga los productos que se indican:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 5 & 0 \\ -3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 6 \\ -6 & -5 & -2 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 12 & -20 \\ 12 & -18 & 30 \\ -5 & 9 & -15 \end{pmatrix}$$

b) Halle la inversa de:

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

c) Ortonormalice por el método de Schmidt la base $(3, 1, 2)\,; (-1, 2, 0)\,; (1, -1, -2)$.

2. *a)* Halle los autovalores y autovectores de:

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & -16 \\ -12 & 5 & 24 \\ 6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} .6 & .8\,i \\ .8\,i & .6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 2 & 1+3\,i \\ 2-i & 1-3\,i & 1 \end{pmatrix}$$

b) Diga cuales de dichas matrices son hermíticas y cuales unitarias. Diagonalícelas y en el caso de las matrices hermíticas hágalo con una matriz unitaria. En el caso de aquellas matrices de las dadas, que sean unitarias, verifique que su determinante vale 1.

3. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & -1 & .5 \\ -1 & 3 & 1 \\ .5 & 1 & 2.5 \end{pmatrix}$$

a) Halle autovalores y autovectores.

b) Halle los proyectores de A y muestre que los autovectores de A lo son también de sus proyectores.

c) Muestre que los proyectores de A son (i) indempotentes , (ii) forman una descomposición de la unidad. (Se dice que un operador A es idempotente si es igual a su cuadrado, o sea $A = A^2$.)

4. *a)* Pruebe que es $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ y $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

   b) Pruebe que si existe A^{-1} y $(A-B)^{-1}$ entonces $(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A-B)^{-1}$

   c) Si A, B y C son hermíticas, halle el $ij-$ésimo elemento de $A^\dagger BC$ en función de los elementos A, B y C.

5. *a)* Verifique que una matriz normal (es decir que conmuta con su adjunta) cumple que: i) Si todos sus autovalores son reales es hermítica, ii) Si todos sus autovalores son de módulo 1 es unitaria.

   b) Construir: i) Una matriz que sea a la vez hermítica y unitaria. ii) Una matriz normal ni hermítica ni unitaria.

6. Se define el conmutador de 2 matrices A y B como $[A, B] = AB - BA$.
   Probar que:

   a) $[A, B] + [B, A] = 0$ y $[A, A] = 0$

   b) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$ y $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$

   c) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ y $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$

   d) $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$

   e) Si A y B conmutan con su conmutador $[A, B]$ entonces es:

   i) $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$
   ii) $[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$
   iii) $[A, F(B)] = [A, B]F^{'}$, donde por definición, si es $F(B) = \sum_n a_n B^n$ sería $F^{'}(B) = \sum_n a_n n\, B^{n-1}$

7. Si $A(t)$ es un operador que depende de una variable cualquiera, se define
   $A^{'}(t) = \dot{A}(t) = \frac{dA}{dt} = \lim \frac{A(t+dt)-A(t)}{\Delta t}$. Demostrar que:

   a) $\frac{d\exp(Bt)}{dt} = \exp(Bt)\, B$

   b) $\frac{d\exp(Bt)\,\exp(Ct)}{dt} = B\,\exp(Bt)\,\exp(Ct) + \exp(Bt)\,C\,\exp(Ct)$, donde $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$ por definición y B y C son operadores constantes (no dependen de t).

8. *a)* Demostrar que $[A, F(A)] = 0$ donde $(F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n)$

   b) Bajo que condiciones es $\exp(A)\,\exp(B) = \exp(A + B)$?

9. Sea A una matriz normal de orden n con autovalores (todos distintos entre si) $\lambda_1 \dots \lambda_m$ con $(n \geq m)$.

   a) El polinomio secular de A será $D(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n$. Pruebe que

   $P_k = \Pi_{k\neq l}\frac{A-\lambda_l\, Id}{\lambda_k-\lambda_l} = \frac{P(A)}{(A-\lambda_k\, Id)\, P^{'}(\lambda_k)}$

   donde $P(A)$ es el polinomio secular reducido (con iguales raíces que $D(\lambda)$ pero todos simples), $P^{'}(\lambda) = \frac{dP}{d\lambda}$ y P_k es el proyector de A asociado a λ_k.

b) Verificar que

$\sum_k \frac{P(X)}{(X-\lambda_k\, Id)\, P'(\lambda_k)} = Id$. Verificar además que esta igualdad implica que $\sum_k P_k = Id$, (descomposición de la unidad) y luego que, cualquiera sea X entonces $X = \sum_k P_k\, X$.

c) Si $n = m$ y luego $P(\lambda) = D(\lambda)$ pruebe que

$P_k = \frac{A^{n-1}+c_{k_2} A^{n-2}+\ldots+c_{k_n}\, Id}{\lambda_k^{n-1}+c_{k_2}\lambda_k^{n-2}+\ldots+c_{k_n}}$

donde

$c_{k_p} = \alpha_{p-1} + \lambda_k\, S_{k\, p-1}$

10. *a)* Halle autovalores y proyectores de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y usando los proyectores, obtenga los vectores propios de B.

b) Diagonalice y halle proyectores de la matriz hermítica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. En un espacio vectorial de dimensión 2, considere el operador cuya matriz se escribe, en la base ortonormal $\{|\,1>|\,2>\}$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Es σ_y hermítica? Calcule sus valores y vectores propios en la base $\{|\,1>|\,2>\}$. Halle también sus proyectores y verifique que se cumplen las relaciones de ortogonalidad y clausura.

b) Idem que a) para las matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \qquad L = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(L representa un operador en un espacio de 3 dimensiones en vez de 2).

c) Demuestre que las matrices σ_x, σ_y y σ_z cumplen $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = Id$. Estas matrices se llaman matrices de Pauli. Muestre que cualquier matriz de orden 2 puede ponerse como combinación lineal de la identidad y las matrices de Pauli.

d) Muestre que

$\exp(i\alpha\sigma_x) = Id\cos\alpha + i\sigma_x \sin\alpha$

y que se cumple una relación idéntica para σ_y y σ_z, y también para toda matriz del tipo $\sigma_\mu = \nu\sigma_x + \mu\sigma_y$ con $\nu^2 + \mu^2 = 1$.
Calcule
$\exp(2i\sigma_x)$, $(\exp(i\sigma_x))^2$ y $\exp(i(\sigma_x + \sigma_y))$