

Práctico 4: Postulados

(los problemas con asterisco se entregarán hasta el miércoles 18 de octubre)

1. Por definición, un proyector P_i es menor que o igual que otro proyector P_j si $P_i P_j = P_i$; luego se usa la notación $P_i \leq P_j$. Mostrar que si $P_i \leq P_j$, se tiene necesariamente $\langle u | P_i | u \rangle \leq \langle u | P_j | u \rangle$ para cualquier $| u \rangle$, y viceversa. Mostrar directamente o usando esta última propiedad, que la desigualdad así definida satisface los axiomas característicos de una desigualdad i) $P_i \leq P_j$ y $P_j \leq P_i$ implican $P_i = P_j$; ii) $P_i \leq P_j$ y $P_j \leq P_k$ implican $P_i \leq P_k$.
2. Si P_1, P_2, \dots, P_k son proyectores, mostrar que su suma es también un proyector si y solo si,

$$\sum_{i=1}^k \langle u | P_i | u \rangle \leq \langle u | P_i | u \rangle \quad (1)$$

para cualquier vector $| u \rangle$ del espacio de Hilbert.

3. Considere el Hamiltoniano H de una partícula en un problema unidimensional definido como:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X) \quad (2)$$

donde X y P son los operadores que satisfacen la relación $[X, P] = i\hbar$. Los autovectores de H se expresan como: $H | \phi_n \rangle = E_n | \phi_n \rangle$, donde n es un índice discreto.

a) Muestre que:

$$\langle \phi_n | P | \phi_{n'} \rangle = \alpha \langle \phi_n | X | \phi_{n'} \rangle \quad (3)$$

donde α es un coeficiente que depende de la diferencia entre E_n y $E_{n'}$. Calcular α (sugerencia: considerar el conmutador $[X, H]$).

b) De este resultado deduzca, usando la relación de clausura, la ecuación:

$$\sum_{n'} (E_n - E_{n'})^2 |\langle \phi_n | X | \phi_{n'} \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} \langle \phi_n | P^2 | \phi_n \rangle \quad (4)$$

4. *

a) Considere un sistema físico cuyo espacio de estados tridimensional está constituido por la base ortonormal formada por los tres kets $| u_1 \rangle | u_2 \rangle | u_3 \rangle$. En la base de estos tres vectores tomados en ese orden, los dos operadores H y B están definidos por:

$$H = \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde ω_0 y b son constantes reales.

b) Son H y B hermitianos ?

c) Mostrar que H y B conmutan y construir una base de autovectores comunes a H y B .

d) Considere los conjuntos de operadores $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H, B\}$, $\{H^2, B\}$; indique cuales constituyen un C.C.O.C..

e) En el mismo espacio de estados considerar dos operadores L_z y S definidos como:

$$\begin{array}{lll} L_z |u_1\rangle = |u_1\rangle & L_z |u_2\rangle = 0 & L_z |u_3\rangle = -|u_3\rangle \\ S |u_1\rangle = |u_3\rangle & S |u_2\rangle = |u_2\rangle & S |u_3\rangle = |u_1\rangle \end{array}$$

f) Escriba las matrices que representan, en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, a los operadores L_z, L_z^2, S, S^2 . Indique cuales de estos operadores son observables.

g) Dar la forma de la matriz mas general que representa a un operador que conmuta con L_z ; idem para L_z^2 y S^2 .

h) L_z^2 y S^2 forman un C.C.O.C ? Indique una base de autovectores comunes.

5. La función de onda de una partícula libre, en un problema unidimensional, está dada en el instante $t = 0$ por:

$$\psi(x, 0) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(-|k|/k_0) \exp(ikx) \quad (5)$$

donde k_0 y N son constantes.

a) Cuál es la probabilidad $\mathcal{P}(p_1, 0)$ de que una medida del momento realizada en el instante $t = 0$ produzca un resultado incluído entre $-p_1$ y $+p_1$? Dibuje la función $\mathcal{P}(p_1, 0)$.

b) Que ocurre con esta probabilidad $\mathcal{P}(p_1, 0)$ si la medida se realiza en el instante t ? Interprete.

c) Cuál es la forma del paquete de ondas en el instante $t = 0$. Calcular en ese instante el producto $\Delta X \cdot \Delta P$; cuál es su conclusión . Describa cualitativamente la subsecuente evolución del paquete.

6. En un problema unidimensional, considere una partícula de energía potencial $V(X) = -fX$, donde f es una constante positiva ($V(X)$ surge, por ejemplo, de un campo gravitacional o un campo eléctrico uniforme).

a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y del momento P de la partícula. Integre estas ecuaciones; compare con el movimiento clásico.

b) Mostrar que la desviación cuadrática media ΔP no cambia con el tiempo.

c) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación $|p\rangle$. Deduzca de ella la relación entre $\frac{\partial}{\partial t} |\langle p | \psi(t) \rangle|^2$ y $\frac{\partial}{\partial p} |\langle p | \psi(t) \rangle|^2$. Integre la ecuación obtenida, e interprete físicamente.

7. * En un problema unidimensional, considerar un sistema de dos partículas (1) y (2) con las que se asocia la función de onda $\psi(x_1, x_2)$.

a) Cuál es la probabilidad de encontrar, en una medida de las posiciones X_1 y X_2 de las dos partículas, un resultado tal que:

$$x \leq x_1 \leq x + dx \quad (6)$$

$$\alpha \leq x_2 \leq \beta \quad (7)$$

- b) Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula (1) entre x y $x + dx$ cuando no se han hecho observaciones de la partícula (2) .
- c) Calcule la probabilidad de encontrar por lo menos una de las partículas entre α y β .
- d) Calcule la probabilidad de encontrar una y solo una de las partículas entre α y β .
- e) Cuál es la probabilidad de encontrar el momento de la partícula (1) entre p' y p'' , y la posición de la partícula (2) entre α y β .
- f) Los momentos P_1 y P_2 de las dos partículas son medidos; cuál es la probabilidad de encontrar $p' \leq p_1 \leq p''$; $p''' \leq p_2 \leq p''''$.
- g) La única cantidad que se mide es el momento P_1 de la primer partícula. Calcular, primero de los resultados de e) y luego de los de f), la probabilidad de encontrar este momento entre p' y p'' . Compare los dos resultados obtenidos.
- h) La distancia algebraica $X_1 - X_2$ entre dos partículas es medida. Cuál es la probabilidad de encontrar el resultado entre $-d$ y d . Cuál es el valor medio de esta distancia .
8. * Considere un sistema físico cuyo espacio de estados que es tridimensional, esté constituido por una base ortonormal formada por tres kets $|u_1\rangle |u_2\rangle |u_3\rangle$. En esta base, el operador Hamiltoniano H del sistema y los dos observables A y B se escriben:

$$H = \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde ω_0 , a y b son constantes reales positivas. El estado físico en el instante $t = 0$ está en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle \quad (8)$$

- a) En el instante $t = 0$, la energía del sistema es medida. Que valores se pueden encontrar, y con que probabilidades . Calcular, para el sistema en el estado $|\psi(0)\rangle$, el valor medio $\langle H \rangle$ y la desviación cuadrática media ΔH .
- b) En vez de medir H en el instante $t = 0$, se mide A ; que resultados se pueden encontrar y cuales son sus probabilidades . Cuál es el vector de estado inmediatamente luego de la medición .
- c) Calcular el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema en el instante t .
- d) Calcular los valores medios $\langle A \rangle (t)$ y $\langle B \rangle (t)$ de A y B en el instante t . Qué comentarios se pueden hacer .
- e) Qué resultados se obtienen si el observable A es medido en el instante t . La misma pregunta para el observable B . Interprete.

9. Considere un sistema físico arbitrario. Llame al Hamiltoniano $H_0(t)$ y al correspondiente operador de evolución $U_0(t, t')$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_0(t, t_0) = H_0(t) U_0(t, t_0) \quad (9)$$

$$U_0(t_0, t_0) = 1 \quad (10)$$

Asuma que el sistema es perturbado de tal forma que su Hamiltoniano resulta $H(t) = H_0(t) + W(t)$. El vector de estado del sistema en la imagen de interacción, $|\psi_I(t)\rangle$, es definido a partir del vector de estado $|\psi_S(t)\rangle$, en la imagen de Schrödinger como:

$$|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle \quad (11)$$

a) Mostrar que la evolución de $|\psi_I(t)\rangle$, está dada por:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = W_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad (12)$$

donde $W_I(t)$ es el operador transformado de $W(t)$ bajo la transformación unitaria asociada con $U_0^\dagger(t, t_0)$:

$$W_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0) W(t) U_0(t, t_0) \quad (13)$$

Explicar cualitativamente porque, cuando la perturbación $W_I(t)$ es mucho menor que $H_0(t)$, el movimiento del vector $|\psi_I(t)\rangle$ es mas lento que el de $|\psi_S(t)\rangle$.

b) Mostrar que la precedente ecuación diferencial es equivalente a la ecuación integral:

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' W_I(t') |\psi_I(t')\rangle \quad (14)$$

donde: $|\psi_I(t_0)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle$.

c) Al resolver esta ecuación integral por iteración, mostrar que el ket $|\psi_I(t)\rangle$ se puede expandir en serie de potencias en W de la forma:

$$|\psi_I(t)\rangle = \left(1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' W_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' W_I(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' W_I(t'') + \dots \right) |\psi_I(t_0)\rangle \quad (15)$$

10. El Hamiltoniano del oscilador armónico es $H = (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)/2m$. Mostrar que los valores medios $\langle q \rangle$, $\langle p \rangle$ realizan oscilaciones sinusoidales de frecuencia $\omega/2\pi$ alrededor del origen. Mostrar que los cuadrados de las desviaciones ϖ , χ oscilan sinusoidalmente con la mitad del período alrededor de un valor promedio y calcularlo. En que condiciones ϖ y χ permanecen constantes .

11. Comenzando desde el postulado sobre valores medios, derive la expresión,

$$\omega_D = \frac{\langle u_D | u_D \rangle}{\langle u | u \rangle} \quad (16)$$

la que da la probabilidad para los resultados de medida de una dada cantidad.