Práctico 4: Postulados

1. Por definición, un proyector P_i es menor que o igual que otro proyector P_j si $P_i\,P_j = P_i$; luego se usa la notación $P_i \leq P_j$. Mostrar que si $P_i \leq P_j$, se tiene necesariamente $< u \mid P_i \mid u > \leq < u \mid P_i \mid u >$ para cualquier $\mid u >$, y viceversa. Mostrar directamente o usando esta última propiedad, que la desigualdad asi definida satisface los axiomas característicos de una desigualdad i) $P_i \leq P_j$ y $P_j \leq P_i$ implican $P_i = P_j$; ii) $P_i \leq P_j$ y $P_j \leq P_k$ implican $P_i \leq P_k$.

2. Si $P_1, P_2, \cdots, P_k$ son proyectores, mostrar que su suma es también un proyector si y solo si,

$$\sum_{i=1}^{k} < u \mid P_i \mid u > \leq < u \mid P_i \mid u > \tag{1}$$

para cualquier vector $\mid u >$ del espacio de Hilbert.

3. Considere el Hamiltoniano H de una partícula en un problema unidimensional definido como:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X) \tag{2}$$

donde X y P son los operadores que satisfacen la relación $[X, P] = i\,\hbar$. Los autovectores de H se expresan como: $H \mid \phi_n >= E_n \mid \phi_n >$, donde n es un índice discreto.

a) Muestre que:

$$< \phi_n \mid P \mid \phi_{n'} >= \alpha < \phi_n \mid X \mid \phi_{n'} > \tag{3}$$

donde α es un coeficiente que depende de la diferencia entre E_n y $E_{n'}$. Calcular α (sugerencia: considerar el conmutador $[X, H]$).

b) De este resultado deduzca, usando la relación de clausura, la ecuación:

$$\sum_{n'} (E_n - E_{n'})^2 \; |< \phi_n \mid X \mid \phi_{n'} >|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} < \phi_n \mid P^2 \mid \phi_n > \tag{4}$$

4. *

a) Considere un sistema físico cuyo espacio de estados tridimensional está constituído por la base ortonormal formada por los tres kets $\mid u_1 >\mid u_2 >\mid u_3 >$. En la base de estos tres vectores tomados en ese orden, los dos operadores H y B están definidos por:

$$H = \hbar\,\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde ω_0 y b son constantes reales.

b) Son H y B hermitianos ?

c) Mostrar que H y B conmutan y construir una base de autovectores comunes a H y B.

d) Considere los conjuntos de operadores $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H, B\}$, $\{H^2, B\}$; indique cuales constituyen un C.C.O.C..

e) En el mismo espacio de estados considerar dos operadores L_z y S definidos como:

$$\begin{array}{lll} L_z \mid u_1 >=\mid u_1 > & L_z \mid u_2 >= 0 & L_z \mid u_3 >= - \mid u_3 > \\ S \mid u_1 >=\mid u_3 > & S \mid u_2 >=\mid u_2 > & S \mid u_3 >=\mid u_1 > \end{array}$$

f) Escriba las matrices que representan, en la base $\{\mid u_1 > \mid u_2 > \mid u_3 >\}$, a los operadores L_z, L_z^2, S, S^2. Indique cuales de estos operadores son observables.

g) Dar la forma de la matriz mas general que representa a un operador que conmuta con L_z; idem para L_z^2 y S^2.

h) L_z^2 y S^2 forman un C.C.O.C ? Indique una base de autovectores comunes.

5. La función de onda de una partícula libre, en un problema unidimensional, está dada en el instante $t = 0$ por:

$$\psi(x, 0) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \exp(- \mid k \mid /k_0) \, \exp(\imath kx) \tag{5}$$

donde k_0 y N son constantes.

a) Cuál es la probabilidad $\mathcal{P}(p_1, 0)$ de que una medida del momento realizada en el instante $t = 0$ produzca un resultado incluído entre $-p_1$ y $+p_1$? Dibuje la función $\mathcal{P}(p_1, 0)$.

b) Que ocurre con esta probabilidad $\mathcal{P}(p_1, 0)$ si la medida se realiza en el instante t ? Interprete.

c) Cuál es la forma del paquete de ondas en el instante $t = 0$. Calcular en ese instante el producto $\Delta X.\Delta P$; cuál es su conclusión . Describa cualitativamente la subsecuente evolución del paquete.

6. En un problema unidimensional, considere una partícula de energía potencial $V(X) = -f\,X$, donde f es una constante positiva ($V(X)$ surge, por ejemplo, de un campo gravitacional o un campo eléctrico uniforme).

a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y del momento P de la partícula. Integre estas ecuaciones; compare con el movimiento clásico.

b) Mostrar que la desviación cuadrática media ΔP no cambia con el tiempo.

c) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación $\mid p >$. Deduzca de ella la relación entre $\frac{\partial}{\partial t} \; |< p \mid \psi(t) >|^2$ y $\frac{\partial}{\partial p} \; |< p \mid \psi(t) >|^2$. Integre la ecuación obtenida, e interprete físicamente.

7. * En un problema unidimensional, considerar un sistema de dos partículas (1) y (2) con las que se asocia la función de onda $\psi(x_1, x_2)$.

a) Cuál es la probabilidad de encontrar, en una medida de las posiciones X_1 y X_2 de las dos partículas, un resultado tal que:

$$x \leq x_1 \leq x + dx \tag{6}$$

$$\alpha \leq x_2 \leq \beta \tag{7}$$

b) Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula (1) entre x y $x + dx$ cuando no se han hecho observaciones de la partícula (2) .

c) Calcule la probabilidad de encontrar por lo menos una de las partículas entre α y β.

d) Calcule la probabilidad de encontrar una y solo una de las partículas entre α y β.

e) Cuál es la probabilidad de encontrar el momento de la partícula (1) entre p' y p'', y la posición de la partícula (2) entre α y β .

f) Los momentos P_1 y P_2 de las dos partículas son medidos; cuál es la probabilidad de encontrar $p' \leq p_1 \leq p^{''}$; $p^{'''} \leq p_2 \leq p^{''''}$.

g) La única cantidad que se mide es el momento P_1 de la primer partícula. Calcular, primero de los resultados de e) y luego de los de f), la probabilidad de encontrar este momento entre p' y $p^{''}$. Compare los dos resultados obtenidos.

h) La distancia algebraica $X_1 - X_2$ entre dos partículas es medida. Cuál es la probabilidad de encontrar el resultado entre $-d$ y d . Cuál es el valor medio de esta distancia .

8. * Considere un sistema físico cuyo espacio de estados que es tridimensional, esté constituído por una base ortonormal formada por tres kets $\mid u_1 > \mid u_2 > \mid u_3 >$. En esta base, el operador Hamiltoniano H del sistema y los dos observables A y B se escriben:

$$H = \hbar\,\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde ω_0, a y b son constantes reales positivas. El estado físico en el instante $t = 0$ está en el estado:

$$\mid \psi(0) >= \frac{1}{\sqrt{2}} \mid u_1 > +\frac{1}{2} \mid u_2 > +\frac{1}{2} \mid u_3 > \tag{8}$$

a) En el instante $t = 0$, la energía del sistema es medida. Que valores se pueden encontrar, y con que probabilidades . Calcular, para el sistema en el estado $\mid \psi(0) >$, el valor medio $< H >$ y la desviación cuadrática media ΔH.

b) En vez de medir H en el instante $t = 0$, se mide A; que resultados se pueden encontrar y cuales son sus probabilidades . Cuál es el vector de estado inmediatamente luego de la medición .

c) Calcular el vector de estado $\mid \psi(t) >$ del sistema en el instante t.

d) Calcular los valores medios $< A > (t)$ y $< B > (t)$ de A y B en el instante t. Qué comentarios se pueden hacer .

e) Qué resultados se obtienen si el observable A es medido en el instante t . La misma pregunta para el observable B. Interprete.

9. Considere un sistema físico arbitrario. Llame al Hamiltoniano $H_0(t)$ y al correspondiente operador de evolución $U_0(t, t')$:

$$\imath\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}U_0(t,t_0) = H_0(t)\,U_0(t,t_0) \tag{9}$$

$$U_0(t_0,t_0) = 1 \tag{10}$$

Asuma que el sistema es perturbado de tal forma que su Hamiltoniano resulta $H(t) = H_0(t) + W(t)$. El vector de estado del sistema en la imagen de interacción, $\mid \psi_I(t) >$, es definido a partir del vector de estado $\mid \psi_S(t) >$, en la imagen de Schrödinger como:

$$\mid \psi_I(t) >= U_0^\dagger(t,t_0)\ \mid \psi_S(t) > \tag{11}$$

a) Mostrar que la evolución de $\mid \psi_I(t) >$, está dada por:

$$\imath\hbar\,\frac{d}{dt}\ \mid \psi_I(t) >= W_I(t)\ \mid \psi_I(t) > \tag{12}$$

donde $W_I(t)$ es el operador transformado de $W(t)$ bajo la transformación unitaria asociada con $U_0^\dagger(t,t_0)$:

$$W_I(t) = U_0^\dagger(t,t_0)\,W(t)\,U_0(t,t_0) \tag{13}$$

Explicar cualitativamente porque, cuando la perturbación $W_I(t)$ es mucho menor que $H_0(t)$, el movimiento del vector $\mid \psi_I(t) >$ es mas lento que el de $\mid \psi_S(t) >$.

b) Mostrar que la precedente ecuación diferencial es equivalente a la ecuación integral:

$$\mid \psi_I(t) >=\mid \psi_I(t_0) > + \frac{1}{\imath\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\,W_I(t')\ \mid \psi_I(t') > \tag{14}$$

donde: $\mid \psi_I(t_0) >=\mid \psi_S(t_0) >$.

c) Al resolver esta ecuación integral por iteración, mostrar que el ket $\mid \psi_I(t) >$ se puede expandir en serie de potencias en W de la forma:

$$\mid \psi_I(t) >= \left(1 + \frac{1}{\imath\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\,W_I(t') + \frac{1}{(\imath\hbar)^2}\int_{t_0}^{t} dt'\,W_I(t')\int_{t_0}^{t'} dt''\,W_I(t'') + \cdots\right)\mid \psi_I(t_0) > \tag{15}$$

10. El Hamiltoniano del oscilador armónico es $H = (p^2 + m^2\,\omega^2\,q^2)/2m$. Mostrar que los valores medios $< q >$, $< p >$ realizan oscilaciones sinusoidales de frecuencia $\omega/2\pi$ alrededor del origen. Mostrar que los cuadrados de las desviaciones ϖ, χ oscilan sinusoidalmente con la mitad del período alrededor de un valor promedio y calcularlo. En que condiciones ϖ y χ permanecen constantes .

11. Comenzando desde el postulado sobre valores medios, derive la expresión,

$$\omega_D = \frac{< u_D \mid u_D >}{< u \mid u >} \tag{16}$$

la que da la probabilidad para los resultados de medida de una dada cantidad.