Práctico 5: Oscilador armónico

(los problemas con * se entregarán hasta el 8/11/2006)

1. Sean a y $a^\dagger$ dos operadores conjugados Hermitianos tales que $[a, a^\dagger] = 1$. Si definimos $N = a^\dagger a$, mostrar que,

   a)

   (i) $[N, a^p] = -p\, a^p$; $[N, a^{\dagger\, p}] = p\, a^{\dagger\, p}$ (p es un entero > 0);

   (ii) Las únicas funciones algebraicas de a y $a^\dagger$ que conmutan con N son funciones de N.

   b) Mostrar que los operadores a y $a^\dagger$ de la parte anterior no tienen inversa.

   c) Construir las matrices que representan los operadores q y p en la representación N. Verificar que son Hermitianos y que satisfacen la relación de conmutación $[q, p] = \imath\hbar$. Resuelva el problema de los autovalores de q en esta representación; muestre que el espectro de q es no degenerado, continuo y se extiende desde $-\infty$ a $+\infty$. Construya explícitamente el autovector correspondiente al autovalor 0.

2. El estado de un oscilador armónico está representado en $t = 0$ por el paquete de ondas mínimo

$$f(q) = (2\pi\sigma)^{-1/2} \exp\left(\frac{\imath}{\hbar} < p > q - \frac{(q - < q >)^2}{4\sigma}\right) \tag{1}$$

   Mostrar que este paquete sigue siendo mínimo en el curso del tiempo si y solo si $\sigma = \hbar/2m\omega$. Suponemos de aquí en mas que esta condición se cumple. Mostrar luego que $f(q)$ es la función de ondas que representa al vector de estado

$$\mid f >= \exp\left(\frac{\imath}{\hbar} < p > q\right) \exp\left(-\frac{\imath}{\hbar} < q > p\right) \mid 0 > \tag{2}$$

   Deducir que la función $f(q, t)$ es igual, salvo un factor de fase a la expresión obtenida al sustituir en $f(q)$ los valores medios $< q >$ y $< p >$ en el instante t por sus valores en $t = 0$. Determinar los coeficientes c_n del desarrollo de $\mid f >$ en una serie de autovectores del Hamiltoniano, y mostrar que

$$\mid c_n \mid^2 = \exp(-\alpha) \frac{(\alpha)^n}{n!} \tag{3}$$

   con $\alpha = E_{cl}/\hbar\omega$ y $E_{cl} = \frac{1}{2m} (< p >^2 + m^2 \omega^2 < q >^2)$.

3. * Considere un oscilador armónico de masa m y frecuencia angular ω. En el instante $t = 0$, el estado del oscilador está dado por:

$$\mid \psi(0) >= \sum_n c_n \mid \phi_n > \tag{4}$$

   donde los estados $\mid \phi_n >$ son estados estacionarios con energías $(n + 1/2)\hbar\omega$.

a) Cuál es la probabilidad $\mathcal{P}$ de que una medida de la energía del oscilador realizada en un instante arbitrario $t > 0$ de un resultado mayor que $2\hbar\omega$? Cuando $\mathcal{P} = 0$ cuales son los coeficientes c_n distintos de 0 ?

b) De ahora en más suponga que solo c_0 y c_1 son diferentes de 0. Escriba la condición de normalización para $\mid \psi(0) >$ y el valor medio $< H >$ de la energía en términos de c_0 y c_1. Con el requerimiento adicional $< H >= \hbar\omega$ calcular $\mid c_0 \mid^2$ y $\mid c_1 \mid^2$.

c) Como el vector de estado normalizado $\mid \psi(0) >$ se define salvo un factor de fase global, se fija este factor al elegir c_0 real y positiva. Fijamos $c_1 =\mid c_1 \mid \exp(\imath\theta_1)$. Suponemos que $< H >= \hbar\omega$ y que:

$$< X >= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{5}$$

Calcule θ_1.

d) Con $\mid \psi(0) >$ asi determinado, escriba $\mid \psi(t) >$ para $t > 0$ y calcule el valor de θ_1 en t. Deduzca el valor medio $< X > (t)$ de la posición en t.

4. * Dos partículas de la misma masa m, con posiciones X_1 y X_2 y momento P_1 y P_2, están sometidas al potencial

$$V(X) = \frac{1}{2}m\,\omega^2\,X^2 \tag{6}$$

Las dos partículas no interactúan.

a) Escriba el operador H, el Hamiltoniano del sistema de dos partículas. Mostrar que H puede ser escrito:

$$H = H_1 + H_2 \tag{7}$$

donde H_1 y H_2 actúan respectivamente solo en el espacio de estados de la partícula (1) y de la partícula (2). Calcular las energías del sistema de dos partículas, sus grados de degeneración, y las correspondientes funciones de onda.

b) Forma H un C.C.O.C ? La misma pregunta para el conjunto H_1, H_2.
Llamamos $\mid \Phi_{n_1,n_2} >$ los autovectores comunes a H_1 y H_2. Escriba la ortonormalización y las relaciones de clausura para los estados $\mid \Phi_{n_1,n_2} >$.

c) Considere un sistema que en $t = 0$ está en el estado:

$$\mid \psi(0) >= \frac{1}{2}\,(\mid \Phi_{0,0} > + \mid \Phi_{1,0} > + \mid \Phi_{0,1} > + \mid \Phi_{1,1} >) \tag{8}$$

Que resultados se pueden encontrar, y con que probabilidades, si en ese instante se mide:

- La energía total del sistema ?
- La energía de la partícula (1) ?
- La posición o velocidad de esta partícula ?

5. * Un oscilador armónico unidimensional está compuesto de una masa m, carga q y energía potencial $V(X) = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,X^2$. Se supone en el ejercicio que la partícula es colocada en un campo eléctrico $\mathcal{E}(t)$ paralelo al eje X y dependiente del tiempo, de modo tal que $V(X)$ se sume a la energía potencial:

$$W(t) = -q\,\mathcal{E}(t)\,X \tag{9}$$

a) Escriba el Hamiltoniano $H(t)$ de la partícula en términos de los operadores a y $a^\dagger$. Calcule los conmutadores de a y $a^\dagger$ con $H(t)$.

b) Sea $\alpha(t)$ el número definido por:

$$\alpha(t) =< \psi(t) \mid a \mid \psi(t) > \tag{10}$$

donde $\mid \psi(t) >$ es el vector de estado normalizado de la partícula bajo estudio. Mostrar a partir de los resultados de la pregunta anterior que $\alpha(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\imath\,\omega\,\alpha(t) + \imath\,\lambda(t) \tag{11}$$

donde $\lambda(t)$ está definida por:

$$\lambda(t) = \frac{q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\mathcal{E}(t) \tag{12}$$

Integrar esta ecuación diferencial. En el instante t, cuales son los valores medios de la posición y el momento de la partícula ?

c) El ket $\mid \phi(t) >$ se define como:

$$\mid \phi(t) >= [a - \alpha(t)] \mid \psi(t) > \tag{13}$$

donde $\alpha(t)$ tiene el valor calculado en b. Usando los resultados de las preguntas en a y b, mostrar que la evolución de $\mid \phi(t) >$ está dada por:

$$\imath\,\hbar\,\frac{d}{dt} \mid \phi(t) >= [H(t) + \hbar\,\omega] \mid \phi(t) > \tag{14}$$

Como varía la norma de $\mid \phi(t) >$ con el tiempo ?

d) Suponiendo que $\mid \psi(0) >$ es un autovector de a con el autovalor $\alpha(0)$, mostrar que $\mid \psi(t) >$ es también un autovector de a, y calcular su autovalor. Encontrar en el instante t el valor medio del Hamiltoniano sin perturbar

$$H_0 = H(t) - W(t) \tag{15}$$

como función de $\alpha(0)$. Dar las desviaciones cuadráticas medias ΔX, ΔP y ΔH_0; como varían en el tiempo ?

e) Suponga que en $t = 0$, el oscilador está en el estado fundamental $\mid \phi_0 >$. El campo eléctrico actúa entre los instantes 0 y T y luego cae a cero. Cuando $t > T$, cuál es la evolución de los valores medios $< X > (t)$ y $< P > (t)$? Aplicación: suponga que entre 0 y T, el campo $\mathcal{E}(t)$ está dado por $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega'\,t)$; discutir el fenómeno observado (resonancia) en términos de $\Delta\,\omega = \omega' - \omega$. Si, en $t > T$, la energía es medida, cuales resultados se pueden encontrar, y con que probabilidades ?

6. El operador de evolución $U(t,0)$ de un oscilador armónico unidimensional se escribe:

$$U(t,0) = \exp(-\imath\, H\, t/\hbar) \tag{16}$$

con $H = \hbar\, \omega\, (a^\dagger\, a + \frac{1}{2})$

a) Considere los operadores:

$$\tilde{a}(t) = U^\dagger(t,0)\, a\, U(t,0) \tag{17}$$
$$\tilde{a}^\dagger(t) = U^\dagger(t,0)\, a^\dagger\, U(t,0) \tag{18}$$

Calculando su acción sobre los autoestados $\mid \phi_n >$ de H, encontrar la expresión para $\tilde{a}(t)$ y $\tilde{a}^\dagger(t)$ en términos de a y $a^\dagger$.

b) Calcular los operadores $\tilde{X}^\dagger(t)$ y $\tilde{P}^\dagger(t)$ obtenidos de X y P por medio de la transformación unitaria:

$$\tilde{X}(t) = U^\dagger(t,0)\, X\, U(t,0) \tag{19}$$
$$\tilde{P}^\dagger(t) = U^\dagger(t,0)\, P\, U(t,0) \tag{20}$$

Como se pueden interpretar estas relaciones ?

c) Mostrar que $U^\dagger(\frac{\pi}{2\omega},0) \mid x >$ es un autovector de P y especificar su autovalor. En forma similar, establezca que $U^\dagger(\frac{\pi}{2\omega},0) \mid p >$ es un autovector de X.

d) En $t = 0$, la función de onda del oscilador es $\psi(x,0)$. Como se puede obtener de $\psi(x,0)$ la función de onda del oscilador en todos los instantes $t = \frac{q\pi}{2\omega}$ (donde q es un entero positivo) ?

e) Elija como $\psi(x,0)$ la función de onda $\phi_n(x)$ asociada con un estado estacionario. De la pregunta anterior deduzca la relación que debe existir entre $\phi_n(x)$ y su transformada de Fourier $\overline{\phi}_n(p)$.

f) Describa cualitativamente la evolución de la función de onda en los siguientes casos:

(i) $\psi(x,0) = \exp(\imath\, k\, x)$ donde k es real y dado.
(ii) $\psi(x,0) = \exp(-\rho\, x)$ donde ρ es real y positivo.
(iii) $\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{a}}$ si $\frac{-a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ y 0 para todo x afuera de ese intervalo.
(iv) $\psi(x,0) = \exp(-\rho^2\, x^2)$ donde ρ es real.