Práctico 5: Postulados y Oscilador armónico

1. Un operador unitario cumple $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$. Muestre que:

   a. estos operadores conservan el producto interno,

   b. si A es hermítico entonces $T = e^{iA}$ es unitario,

   c. el producto de operadores unitario es unitario,

   d. una condición necesaria y suficiente para que un operador sea unitario es que una base transformada por el operador sea también base,

   e. los operadores unitarios tienen autovalores de módulo uno y dos autovectores de diferentes autovalores son ortogonales,

   f. si se define operador transformado de un operador A de la siguiente forma: sea $\mid v_i >$ una base y $\mid \tilde{v_i} >= U \mid v_i >$ su transformado entonces $< \tilde{v_i} \mid \tilde{A} \mid \tilde{v_j} >=< v_i \mid A \mid v_j >$; calcule $\tilde{A}$ en función de U y A; calcule sus autovalores,

   g. se cumplen las siguientes propiedades $\tilde{A}^\dagger = \tilde{A}^\dagger$; $\tilde{F}(A) = F(\tilde{A})$ siendo F una función arbitraria; $U(\epsilon)$ unitario tal que si $\epsilon \to 0$ implica $U(\epsilon) \to 1$ entonces se puede escribir a primer orden como $U(\epsilon) = 1 - i\epsilon F$ siendo F hermítico; calcule $\tilde{A} - A$.

2. El operador paridad de define de la siguiente forma: $\Pi \mid \mathbf{r} >=\mid -\mathbf{r} >$.

   a. Muestre como opera este operador en la representación de posición.

   b. Demuestre que es unitario, hermítico y calcule sus autovalores y el operador inverso.

   c. Dado un operador considere el operador transformado por paridad. Si este coindide con el operador se dice que es par, si coincide con su opuesto se dice que es impar. Muestre que en estos casos los operadores conmutan o anticonmutan con el operador paridad.

   d. Muestre que el elemento de matriz de un operador par (impar) entre estados de diferente (idéntica) paridad es cero; deduzca que el valor medio de un operador impar es cero.

   e. Calcule la paridad del operador paridad y de los operadores de posición y momento.

   f. Muestre que si b es un autovalor no degenerado de un operador B par entonces el autoestado correspondiente tiene paridad definida.

   g. Muestre que el hamiltoniano de una partícula en un potencial par es par y sus autoestados se pueden elegir entonces de paridad definida.

3. El operador densidad (OD) para un sistema en el estado $\mid \psi >$ se define de la siguiente forma $\rho(t) = \mid \psi(t) >< \psi(t) \mid$.

   a. Calcule el valor medio de un operador en función del OD.

   b. Escriba la ecuación de evolución del OD.

   c. Exprese la conservación de la probabilidad con el OD.

   d. Dado un operador A de autovalores a_n calcule $P(a_n)$ en función del OD.

   e. Considere una mezcla estadística de estados y calcule en este caso las probabilidades de medir cada uno de los valores posibles.

4. Sean a y $a^\dagger$ dos operadores conjugados Hermitianos tales que $[a, a^\dagger] = 1$. Si definimos $N = a^\dagger\, a$, muestre que,

a.

(i) $[N, a^p] = -p\, a^p$; $[N, a^{\dagger\, p}] = p\, a^{\dagger\, p}$ (p es un entero > 0);

(ii) Las únicas funciones algebraicas de a y $a^\dagger$ que conmutan con N son funciones de N.

b. Demuestre que los operadores a y $a^\dagger$ de la parte anterior no tienen inversa.

c. Construya las matrices que representan los operadores q y p en la representación N; verifique que son Hermitianos y que satisfacen la relación de conmutación $[q, p] = i\,\hbar$; resuelva el problema de los autovalores de q en esta representación; muestre que el espectro de q es no degenerado, continuo y se extiende desde $-\infty$ a $+\infty$; construya explícitamente el autovector correspondiente al autovalor 0.

5. El estado de un oscilador armónico está representado en $t = 0$ por el paquete de ondas mínimo

$$f(q) = (2\pi\sigma)^{-1/2}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\ <p>\ q - \frac{(q-<q>)^2}{4\sigma}\right)$$

Demuestre que este paquete sigue siendo mínimo en el curso del tiempo si y solo si $\sigma = \hbar/2m\omega$. Suponemos de aquí en más que esta condición se cumple. Verifique que $f(q)$ es la función de ondas que representa al vector de estado

$$\mid f >= \exp\left(\frac{i}{\hbar}\ <p>\ q\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\ <q>\ p\right) \mid 0>$$

Deduzca que la función $f(q, t)$ es igual, salvo un factor de fase, a la expresión obtenida al sustituir en $f(q)$ los valores medios $<q>$ y $<p>$ en el instante t por sus valores en $t = 0$. Determine los coeficientes c_n del desarrollo de $\mid f >$ en una serie de autovectores del Hamiltoniano, y que cumplen $\mid c_n \mid^2 = \exp(-\alpha)\, \frac{(\alpha)^n}{n!}$ con $\alpha = E_{cl}/\hbar\omega$ y $E_{cl} = \frac{1}{2m}\,(<p>^2 + m^2\,\omega^2\ <q>^2)$.

6. * Considere un oscilador armónico de masa m y frecuencia angular ω. En el instante $t = 0$, el estado del oscilador está dado por:

$$\mid \psi(0) >= \sum_n c_n\ \mid \phi_n >$$

donde los estados $\mid \phi_n >$ son estados estacionarios con energías $(n + 1/2)\hbar\omega$.

a. Cuál es la probabilidad $\mathcal{P}$ de que una medida de la energía del oscilador realizada en un instante arbitrario $t > 0$ de un resultado mayor que $2\hbar\omega$? Cuando $\mathcal{P} = 0$, cuáles son los coeficientes c_n distintos de 0 ?

b. De ahora en más suponga que solo c_0 y c_1 son diferentes de 0. Escriba la condición de normalización para $\mid \psi(0) >$ y el valor medio $< H >$ de la energía en términos de c_0 y c_1. Con el requerimiento adicional $< H >= \hbar\omega$ calcule $\mid c_0 \mid^2$ y $\mid c_1 \mid^2$.

c. El vector de estado normalizado $\mid \psi(0) >$ se define salvo un factor de fase global; se fija este factor al elegir c_0 real y positiva. Fijamos $c_1 =\mid c_1 \mid \exp(i\theta_1)$. Suponga que $< H >= \hbar\omega$ y que $< X >= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Calcule θ_1.

d. Con $\mid \psi(0) >$ así determinado, escriba $\mid \psi(t) >$ para $t > 0$ y calcule el valor de θ_1 en t. Deduzca el valor medio $< X > (t)$ de la posición en t.

7. * Dos partículas de la misma masa m, con posiciones X_1 y X_2 y momento P_1 y P_2, están sometidas al potencial $V(X) = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, X^2$. Las dos partículas no interactúan.

   a. Escriba el operador H, el Hamiltoniano del sistema de dos partículas. Mostrar que H puede ser escrito: $H = H_1 + H_2$ donde H_1 y H_2 actúan respectivamente en el espacio de estados de la partícula (1) y de la partícula (2). Calcule las energías del sistema de dos partículas, sus grados de degeneración, y las correspondientes funciones de onda.

   b. Forma H un C.C.O.C ? Y el conjunto H_1, H_2 ?
   Llamamos $\mid \Phi_{n_1,n_2} >$ a los autovectores comunes a H_1 y H_2. Escriba la relación de ortonormalización y las relaciones de clausura para los estados $\mid \Phi_{n_1,n_2} >$.

   c. Considere un sistema que en $t = 0$ está en el estado:

$$\mid \psi(0) >= \frac{1}{2}\, (\mid \Phi_{0,0} > + \mid \Phi_{1,0} > + \mid \Phi_{0,1} > + \mid \Phi_{1,1} >)$$

   Qué resultados se pueden encontrar, y con qué probabilidades, si en ese instante se mide:

   - La energía total del sistema ?
   - La energía de la partícula (1) ?
   - La posición o velocidad de esta partícula ?

8. * Un oscilador armónico unidimensional está compuesto de una masa m, carga q y energía potencial $V(X) = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, X^2$. Se supone en el ejercicio que la partícula es colocada en un campo eléctrico $\mathcal{E}(t)$ paralelo al eje X y dependiente del tiempo, de modo tal que $V(X)$ se sume a la energía potencial:

$$W(t) = -q\, \mathcal{E}(t)\, X$$

   a. Escriba el Hamiltoniano $H(t)$ de la partícula en términos de los operadores a y $a^\dagger$. Calcule los conmutadores de a y $a^\dagger$ con $H(t)$.

   b. Sea $\alpha(t)$ el número definido por: $\alpha(t) =< \psi(t) \mid a \mid \psi(t) >$ donde $\mid \psi(t) >$ es el vector de estado normalizado de la partícula bajo estudio. Muestre a partir de los resultados de la pregunta anterior que $\alpha(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\, \omega\, \alpha(t) + i\, \lambda(t)$$

   donde $\lambda(t)$ está definida por: $\lambda(t) = \frac{q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, \mathcal{E}(t)$
   Integre esta ecuación diferencial. En el instante t, cuáles son los valores medios de la posición y el momento de la partícula ?

   c. El ket $\mid \phi(t) >$ se define de la siguiente forma:

$$\mid \phi(t) >= [a - \alpha(t)]\, \mid \psi(t) >$$

   donde $\alpha(t)$ tiene el valor calculado en b. Usando los resultados de las preguntas en a y b, mostrar que la evolución de $\mid \phi(t) >$ está dada por:

$$i\, \hbar\, \frac{d}{dt} \mid \phi(t) >= [H(t) + \hbar\, \omega]\, \mid \phi(t) >$$

Como varía la norma de $\mid \phi(t) >$ con el tiempo ?

d. Suponiendo que $\mid \psi(0) >$ es un autovector de a con el autovalor $\alpha(0)$, muestre que $\mid \psi(t) >$ es también un autovector de a, y calcule su autovalor. Encuentre en el instante t el valor medio del Hamiltoniano sin perturbar

$$H_0 = H(t) - W(t)$$

como función de $\alpha(0)$. Calcule las desviaciones cuadráticas medias ΔX, ΔP y ΔH_0; cómo varían en el tiempo ?

e. Suponga que en $t = 0$, el oscilador está en el estado fundamental $\mid \phi_0 >$. El campo eléctrico actúa entre los instantes 0 y T y luego cae a cero. Cuando $t > T$, cuál es la evolución de los valores medios $< X > (t)$ y $< P > (t)$? Aplicación: suponga que entre 0 y T, el campo $\mathcal{E}(t)$ está dado por $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega' t)$; discuta el fenómeno observado (resonancia) en términos de $\Delta \omega = \omega' - \omega$. Si, en $t > T$, la energía es medida, cuáles resultados se pueden encontrar, y con qué probabilidades ?

9. El operador de evolución $U(t, 0)$ de un oscilador armónico unidimensional se escribe:

$$U(t, 0) = \exp(-i\, H\, t/\hbar).$$

con $H = \hbar\, \omega\, (a^\dagger\, a + \frac{1}{2})$

a. Considere los operadores:

$$\tilde{a}(t) = U^\dagger(t, 0)\, a\, U(t, 0)$$

$$\tilde{a}^\dagger(t) = U^\dagger(t, 0)\, a^\dagger\, U(t, 0)$$

Calculando su acción sobre los autoestados $\mid \phi_n >$ de H, encontrar la expresión para $\tilde{a}(t)$ y $\tilde{a}^\dagger(t)$ en términos de a y $a^\dagger$.

b. Calcular los operadores $\tilde{X}^\dagger(t)$ y $\tilde{P}^\dagger(t)$ obtenidos de X y P por medio de la transformación unitaria:

$$\tilde{X}(t) = U^\dagger(t, 0)\, X\, U(t, 0)$$

$$\tilde{P}^\dagger(t) = U^\dagger(t, 0)\, P\, U(t, 0)$$

Cómo se pueden interpretar estas relaciones ?

c. Muestre que $U^\dagger(\frac{\pi}{2\omega}, 0) \mid x >$ es un autovector de P y calcule su autovalor. En forma similar, establezca que $U^\dagger(\frac{\pi}{2\omega}, 0) \mid p >$ es un autovector de X.

d. En $t = 0$, la función de onda del oscilador es $\psi(x, 0)$. Cómo se puede obtener de $\psi(x, 0)$ la función de onda del oscilador en todos los instantes $t = \frac{q\pi}{2\omega}$ (donde q es un entero positivo) ?

e. Elija como $\psi(x, 0)$ la función de onda $\phi_n(x)$ asociada con un estado estacionario. De la pregunta anterior deduzca la relación que debe existir entre $\phi_n(x)$ y su transformada de Fourier $\overline{\phi}_n(p)$.

f. Describa cualitativamente la evolución de la función de onda en los siguientes casos:

(i) $\psi(x, 0) = \exp(i\, k\, x)$ donde k es real y dado.

(ii) $\psi(x, 0) = \exp(-\rho\, x)$ donde ρ es real y positivo.

(iii) $\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{a}}$ si $\frac{-a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ y 0 para todo x afuera de ese intervalo.

(iv) $\psi(x, 0) = \exp(-\rho^2\, x^2)$ donde ρ es real.