Práctico 6: Sistemas en tres dimensiones

1. Considere una partícula sin espín en un pozo cúbico infinito de lado a (partícula en una caja):
$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x,y,z \text{ pertenecen al intervalo } [0,a] \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$
a. Encuentre los estados estacionarios y sus energías.

   b. Encuentre las degeneraciones de los primeros 6 estados y de E_{14}. Qué interés particular tiene este caso?

2. * Considere una partícula sin espín en un pozo esférico finito de radio a (partícula confinada en una esfera no rígida):
$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ V_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Encuentre la función de onda del estado base para l=0 y calcule en valor mínimo de V_0 para que haya estados ligados.

3. *

   a. Encuentre $\langle r \rangle$ y $\langle r^2 \rangle$ para un electrón en el estado base del hidrógeno. Exprese sus resultados en términos del radio de Bohr.

   b. Encuentre $\langle x \rangle$ y $\langle x^2 \rangle$ para un electrón en el estado base del hidrógeno. Exprese sus resultados en términos del radio de Bohr.

   c. Encuentre $\langle x^2 \rangle$ en el estado n=2, l=1, m=1.

4. Calcule la probabilidad de que un electrón en el estado base del hidrógeno se encuentre en el núcleo:

   a. Suponga que el radio del núcleo es b y use la función de onda del estado base suponiendo que es válida entre r=0 y ∞ .

   b. Calcule el órden principal de su resultado desarrollando en $\epsilon = 2b/a$.

   c. Compare con el resultado anterior suponiendo que $\Psi(r)$ es constante en el volúmen del núcleo.

   d. Use $b \approx 10^{-15}m$ y $a = 0.5 \times 10^{-10}m$ para estimar la probabilidad.

5. Considere un átomo hidrogenoide (un electrón vinculado a un núcleo con Z protones). Calcule las energías de Bohr $E_n(Z), E_1(Z)$, el radio de Bohr a(Z) y la constante de Rydberg R(Z). En qué zona del espectro electromagnético estaría la Serie de Lyman para Z=2 y Z=3?

6. a. Considere una partícula en un potencial V(r). Demuestre que
$\frac{d}{dt}\langle \overrightarrow{L} \rangle = \langle \overrightarrow{N} \rangle$, donde $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \times (-\nabla V))$

   b. Muestre que $\frac{d}{dt}\langle \overrightarrow{L} \rangle = 0$ para potenciales con simetría esférica (esta es una de las formas de la conservación de momento angular en mecánica cuántica)

7. * Dos partículas de masa m están fijadas en los extremos de una barra sin masa de longitud a. El sistema gira libremente en tres dimensiones alrededor del centro.

   a. Calcule el espectro de energías de este rotor.

   b. Cuáles son las autofunciones normalizadas de este sistema? Cuál es la degeneración del enésimo nivel?

8. * Pruebe el Teorema del Virial en tres dimensiones para estados estacionarios:

   a. $2\langle T\rangle = \langle \vec{r} \cdot \nabla V\rangle$

   b. Para el átomo de Hidrógeno muestre que $\langle T\rangle = -E_n$; $\langle V\rangle = 2E_n$.

   c. Para el oscilador armónico tridimensional muestre que $\langle T\rangle = \langle V\rangle = E_n/2$.