Práctico 6: Sistemas en tres dimensiones - Momento angular

(los problemas con * se entregan hasta el miércoles 22 de noviembre)

1. Considere una partícula sin espín en un pozo cúbico infinito de lado a (partícula en una caja):
$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x,y,z \text{ pertenecen al intervalo } [0,a] \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$
a. Encuentre los estados estacionarios y sus energías.

   b. Encuentre las degeneraciones de los primeros 6 estados y de E_{14}. Qué interés particular tiene este caso?

2. * Considere una partícula sin espín en un pozo esférico finito de radio a (partícula confinada en una esfera no rígida):
$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ V_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Encuentre la función de onda del estado base para l=0 y calcule en valor mínimo de V_0 para que haya estados ligados.

3. a. Encuentre $\langle r \rangle$ y $\langle r^2 \rangle$ para un electrón en el estado base del hidrógeno. Exprese sus resultados en términos del radio de Bohr.

   b. Encuentre $\langle x \rangle$ y $\langle x^2 \rangle$ para un electrón en el estado base del hidrógeno. Exprese sus resultados en términos del radio de Bohr.

   c. Encuentre $\langle x^2 \rangle$ en el estado n=2, l=1, m=1.

4. Calcule la probabilidad de que un electrón en el estado base del hidrógeno se encuentre en el núcleo:

   a. Suponga que el radio del núcleo es b y use la función de onda del estado base suponiendo que es válida entre r=0 y ∞; calcule además el órden principal de su resultado desarrollando en $\epsilon = 2b/a$.

   b. Compare con el resultado anterior suponiendo ahora que $\Psi(r)$ es constante en el volúmen del núcleo.

   d. Use $b \approx 10^{-15}m$ y $a = 0.5 \times 10^{-10}m$ para estimar la probabilidad en los tres casos anteriores .

5. Considere un átomo hidrogenoide (un electrón vinculado a un núcleo con Z protones). Calcule las energías de Bohr $E_n(Z), E_1(Z)$, el radio de Bohr a(Z) y la constante de Rydberg R(Z). En qué zona del espectro electromagnético estaría la Serie de Lyman para Z=2 y Z=3?

6. a. Considere una partícula en un potencial V(r). Demuestre que
$\frac{d}{dt}\langle \overrightarrow{L} \rangle = \langle \overrightarrow{N} \rangle$, donde $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \times (-\nabla V))$

   b. Muestre que $\frac{d}{dt}\langle \overrightarrow{L} \rangle = 0$ para potenciales con simetría esférica (esta es una de las formas de la conservación de momento angular en mecánica cuántica)

7. * Dos partículas de masa m están fijadas en los extremos de una barra sin masa de longitud a. El sistema gira libremente en tres dimensiones alrededor del centro.

   a. Calcule el espectro de energías de este rotor.

b. Cuáles son las autofunciones normalizadas de este sistema? Cuál es la degeneración del enésimo nivel?

8. Calcule las matrices J^2, J_z, $J\pm$, J_x y J_y para $j = 1$. Verifique las relaciones de conmutación de las mismas.

9. Un sistema está en el estado $\psi = \phi_{lm}$, que es autoestado de los operadores de momento angular L^2 y L_z. Calcular $< L_x >$ y $< L_x^2 >$. Sean ϕ_1, ϕ_0, ϕ_{-1} las autofunciones de los operadores L^2 y L_z con autovalores $l = 1$ y $m = 1, 0, -1$. Use los operadores L_+ y L_- para calcular el resultado de operar sobre ϕ_1, ϕ_0, ϕ_{-1} con L_x. Halle las autofunciones y autovalores de L_x.

10. * Considere una partícula de spin 1/2 de momento magnético $\mathbf{M} = \gamma\,\mathbf{S}$. El espacio de estados de spin está dado por la base de vectores $| + >$ y $| - >$, autovectores de S_z, con autovalores $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$. En $t = 0$, el estado del sistema es

$$| \psi(t = 0) >= | + > \tag{1}$$

a) Si el observable S_x es medido en $t = 0$, que resultados se pueden encontrar, y con que probabilidades ?

b) En vez de realizar la anterior medición, dejamos al sistema evolucionar bajo la influencia de un campo magnético paralelo al eje y, de módulo B_0. Calcular en la base $\{| + > | - >\}$ el estado del sistema en el instante t.

c) En este instante t, se miden los observables S_x, S_y, S_z. Que valores se pueden encontrar y con que probabilidades ? Que relación debe existir entre B_0 y t para que el resultado de una medición sea cierto ? De una interpretación física de esta condición.

11. Considere un sistema de momento angular $j = 1$, cuyo espacio de estados está dado por la base $\{| +1 > | \ 0 > | -1 >\}$ de los tres autovectores comunes a $\mathbf{J}^2$ (autovalor $2\hbar^2$) y J_z (respectivamente con autovalores $+\hbar$, 0 y $-\hbar$). El estado del sistema es

$$| \psi >= \alpha \ | +1 > + \beta \ | 0 > + \gamma \ | -1 > \tag{2}$$

donde α, β y γ son tres parámetros complejos.

a) Calcule el valor medio $< \mathbf{J} >$ del momento angular en términos de α, β y γ.

b) Dé la expresión de los tres valores medios $< J_x^2 >$, $< J_y^2 >$ y $< J_z^2 >$ en términos de las mismas cantidades.

12. Considere un sistema físico arbitrario tal que la base está constituída por 4 autovectores $| \, j \, m_z >$ comunes a $\mathbf{J}^2$ y J_z ($j = 0, 1\,;\ -j \ \leq \ m_z \ \leq \ +j$) de autovalores $j\,(j+1)\,\hbar^2$ y $m_z\,\hbar$ tal que:

$$j_\pm \ | \, j \, m_z > \ = \ \hbar \sqrt{j\,(j+1) - m_z\,(m_z \pm 1)} \ | \, j \, m_z \pm 1 > \tag{3}$$
$$j_+ \ | \, j \, j > \ = \ j_- \ | \, j \ -j >= 0 \tag{4}$$

a) Exprese en términos de los kets $| \, j \, m_z >$ los autoestados comunes a $\mathbf{J}^2$ y J_x representados por $| \, j \, m_x >$.

b) Considere un sistema en el estado normalizado:

$$| \psi >= \alpha \mid j = 1\, m_z = 1 > + \beta \mid j = 1\, m_z = 0 > + \gamma \mid j = 1\, m_z = -1 > + \delta \mid j = 0\, m_z = 0 > \tag{5}$$

(i) Cuál es la probabilidad de medir $2\hbar^2$ y $\hbar$ si $\mathbf{J}^2$ y J_x son medidos simultaneamente ?

(ii) Calcule el valor medio de J_z cuando el sistema está en el estado $\mid \psi >$, y las probabilidades de los posibles resultados de una medición solo sobre este observable.

(iii) Mismas preguntas para los observables $\mathbf{J}^2$ y J_x.

(iv) Se mide ahora J_z^2, cuáles son los posibles resultados, sus probabilidades y su valor medio?

13. * Un sistema cuyo espacio de estados es ε_r tiene por función de onda:

$$\psi(x, y, z) = N(x + y + z)\, \exp(-r^2/\alpha^2) \tag{6}$$

donde α es real y está dada y N es una constante de normalización.

a) Los observables L_z y $\mathbf{L}^2$ son medidos, cuáles son las probabilidades de medir 0 y $2\hbar^2$? Recordar que :

$$Y_1^0(\theta\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, \cos\theta \tag{7}$$

b) Si se usa también que:

$$Y_1^{\pm 1}(\theta\phi) = \mp 1 \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, \sin\theta \exp(\pm 1\, \imath\, \phi) \tag{8}$$

es posible predecir directamente las probabilidades de todos los posibles resultados de medir $\mathbf{L}^2$ y L_z en el sistema de la función de onda $\phi(x, y, z)$?

14. Considere un modelo clásico del electrón en el que la masa del mismo (y su energía de reposo relativista $E_0 = mc^2$) es debida a la energía eléctrica almacenda. Suponga que el electrón es esférico.

a) Calcule su radio clásico en estas hipótesis.

b) Su momento angular intrínseco es $\hbar/2$; calcule a qué velocidad se movería un punto en el ecuador de un electrón. Qué puede concluir de este resultado?

15. a) Muestre que el operador $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r}$ no es hermítico.

b) Muestre que el impulso radial $p_r \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r = \frac{\hbar}{i}(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r})$ es hermítico para funciones de cuadrado sumable que cumplen $r\psi(r) \to 0$ cuando $r \to 0$ (esto justifica la condición de borde nula para la función radial en $r = 0$).

c) Calcule el conmutador de r con p_r y demuestre que $p^2 = p_r^2 + L^2/r^2$.

16. Considere la precesión de Larmor en un campo magnético uniforme.

a) Calcule la probabilidad de obtener $\hbar/2$ si se mide la componente del momento angular de espín según la dirección x.

b) Idem para la dirección y.

c) Idem para z.

17. * Considere un electrón en reposo sometido a la acción de un campo magnético uniforme $B = B_0 cos(\omega t)\hat{k}$

    a) Construya la matriz hamiltoneana del sistema.

    b) El electrón se encuentra en t=0 con espín $+\hbar/2$ respecto al eje x ($\chi(0) = \chi_+^{(x)}$). Determine $\chi(t)$ en tiempos subsiguientes.

    c) Encuentre la probabilidad de medir $-\hbar/2$ si se mide S_x.

    d) Cuál es el mínimo campo B_0 que se necesita para forzar un cambio completo en S_x?

18. * Un electrón en un átomo de hidrógeno se encuentra en el siguiente estado:
    $R_{21}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}Y_1^0\chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1\chi_-\right)$

    a) Si se mide el momento orbital angular, qué valores de l se pueden obtener y con qué probabilidades?

    b) Idem para L_z.

    c) Idem para S y S_z.