Práctico 7: Momento angular y espín

1. Calcule las matrices J^2, J_z, $J\pm$, J_x y J_y para $j = 1$. Verifique las relaciones de conmutación de las mismas.

2. Un sistema está en el estado $\psi = \phi_{lm}$, un autoestado de los operadores de momento angular L^2 y L_z. Calcular $< L_x >$ y $< L_x^2 >$. Sean ϕ_1, ϕ_0, ϕ_{-1} las autofunciones de los operadores L^2 y L_z con autovalores $l = 1$ y $m = 1, 0, -1$. Use los operadores L_+ y L_- para calcular el resultado de operar sobre ϕ_1, ϕ_0, ϕ_{-1} con L_x. Halle las autofunciones y autovalores de L_x.

3. Considerar una partícula de spin 1/2 de momento magnético $\mathbf{M} = \gamma\,\mathbf{S}$. El espacio de estados de spin está dado por la base de vectores $\mid + >$ y $\mid - >$, autovectores de S_z, con autovalores $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$. En $t = 0$, el estado del sistema es

$$\mid \psi(t=0) >= \mid + > \tag{1}$$

a) Si el observable S_x es medido en $t = 0$, que resultados se pueden encontrar, y con que probabilidades ?

b) En vez de realizar la anterior medición, dejamos al sistema evolucionar bajo la influencia de un campo magnético paralelo al eje y, de módulo B_0. Calcular en la base $\{\mid + >\mid - >\}$ el estado del sistema en el instante t.

c) En este instante t, se miden los observables S_x, S_y, S_z. Que valores se pueden encontrar y con que probabilidades ? Que relación debe existir entre B_0 y t para que el resultado de una medición sea cierto ? De una interpretación física de esta condición.

4. * Considerar un sistema de momento angular $j = 1$, cuyo espacio de estados está dado por la base $\{\mid +1 >\mid 0 >\mid -1 >\}$ de los tres autovectores comunes a $\mathbf{J}^2$ (autovalor $2\hbar^2$) y J_z (respectivamente con autovalores $+\hbar$, 0 y $-\hbar$). El estado del sistema es

$$\mid \psi >= \alpha \mid +1 > + \beta \mid 0 > + \gamma \mid -1 > \tag{2}$$

donde α, β y γ son tres parámetros complejos.

a) Calcular el valor medio $< \mathbf{J} >$ del momento angular en términos de α, β y γ.

b) Dé la expresión de los tres valores medios $< J_x^2 >$, $< J_y^2 >$ y $< J_z^2 >$ en términos de las mismas cantidades.

5. Considerar un sistema físico arbitrario tal que la base está constituída por 4 autovectores $\mid j\, m_z >$ comunes a $\mathbf{J}^2$ y J_z ($j = 0, 1\,;\, -j \leq m_z \leq +j$) de autovalores $j\,(j+1)\,\hbar^2$ y $m_z\,\hbar$ tal que:

$$j_\pm \mid j\, m_z > \;=\; \hbar\,\sqrt{j\,(j+1) - m_z\,(m_z \pm 1)} \mid j\, m_z \pm 1 > \tag{3}$$
$$j_+ \mid j\, j > \;=\; j_- \mid j\; -j >= 0 \tag{4}$$

a) Expresar en términos de los kets $\mid j\, m_z >$ los autoestados comunes a $\mathbf{J}^2$ y J_x representados por $\mid j\, m_x >$.

b) Considerar un sistema en el estado normalizado:

$$| \psi >= \alpha \mid j = 1 \, m_z = 1 > + \beta \mid j = 1 \, m_z = 0 > + \gamma \mid j = 1 \, m_z = -1 > + \delta \mid j = 0 \, m_z = 0 > \tag{5}$$

(i) Cuál es la probabilidad de medir $2\hbar^2$ y $\hbar$ si $\mathbf{J}^2$ y J_x son medidos simultaneamente ?

(ii) Calcular el valor medio de J_z cuando el sistema está en el estado $| \psi >$, y las probabilidades de los posibles resultados de una medición solo sobre este observable.

(iii) Mismas preguntas para los observables $\mathbf{J}^2$ y J_x.

(iv) Se mide ahora J_z^2, cuáles son los posibles resultados, sus probabilidades y su valor medio ?

6. * Un sistema cuyo espacio de estados es ε_r tiene por función de onda:

$$\psi(x, y, z) = N(x + y + z) \exp(-r^2/\alpha^2) \tag{6}$$

donde α es real y está dada y N es una constante de normalización.

a) Los observables L_z y $\mathbf{L}^2$ son medidos, cuáles son las probabilidades de medir 0 y $2\hbar^2$? Recordar que :

$$Y_1^0(\theta\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \tag{7}$$

b) Si se usa también que:

$$Y_1^{\pm 1}(\theta\phi) = \mp 1 \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \exp(\pm 1 \, \imath \, \phi) \tag{8}$$

es posible predecir directamente las probabilidades de todos los posibles resultados de medir $\mathbf{L}^2$ y L_z en el sistema de la función de onda $\phi(x, y, z)$?

7. Considere un modelo clásico del electrón en el que la masa del mismo (y su energía de reposo relativista $E_0 = mc^2$) es debida a la energía eléctrica almacenda. Suponga que el electrón es esférico.

   a) Calcule su radio clásico en estas hipótesis.

   b) Su momento angular intrínseco es $\hbar/2$; calcule a qué velocidad se movería un punto en el ecuador de un electrón. Qué puede concluir de este resultado?

8. a) Muestre que el operador $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r}$ no es hermítico.

   b) Muestre que el impulso radial $p_r \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r = \frac{\hbar}{i}(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r})$ es hermítico para funciones de cuadrado sumable que cumplen $r\psi(r) \to 0$ cuando $r \to 0$ (esto justifica la condición de borde nula para la función radial en $r = 0$).

   c) Calcule el conmutador de r con p_r y demuestre que $p^2 = p_r^2 + L^2/r^2$.

9. Considere la precesión de Larmor en un campo magnético uniforme.

   a) Calcule la probabilidad de obtener $\hbar/2$ si se mide la componente del momento angular de espín según la dirección x.

   b) Idem para la dirección y.

   c) Idem para z.

10. * Considere un electrón en reposo sometido a la acción de un campo magnético uniforme $B = B_0 cos(\omega t)\hat{k}$

    a) Construya la matriz hamiltoneana del sistema.

    b) El electrón se encuentra en t=0 con espín $+\hbar/2$ respecto al eje x ($\chi(0) = \chi_+^{(x)}$). Determine $\chi(t)$ en tiempos subsiguientes.

    c) Encuentre la probabilidad de medir $-\hbar/2$ si se mide S_x.

    d) Cuál es el mínimo campo B_0 que se necesita para forzar un cambio completo en S_x?

11. * Un electrón en un átomo de hidrógeno se encuentra en el siguiente estado:

    $R_{21}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}Y_1^0\chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1\chi_-\right)$

    a) Si se mide el momento orbital angular, qué valores de l se pueden obtener y con qué probabilidades?

    b) Idem para L_z.

    c) Idem para S y S_z.