Práctico 8: Perturbaciones

1. La función potencial de un oscilador unidimensional de masa m y frecuencia angular ω es

$$V(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2 + c\,x^4 \tag{1}$$

donde el segundo término es pequeño frente al primero.

a) Muestre que a primer orden, el efecto del término anharmónico es cambiar la energía E_0 del estado fundamental por $3c(\hbar/2m\omega)^2$.

b) Cuál sería el efecto a primer orden de un término adicional x^3 en el potencial ?

2. Una partícula de masa m se mueve en un potencial unidimensional de oscilador armónico simple $V^0 = \frac{1}{2}\,k\,x^2$, con frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$. Un término perturbativo pequeño $V^1 = \frac{1}{2}\,\delta k\,x^2$ se suma a V^0.

a) Muestre que las perturbaciones a primer y segundo orden de la energía del estado fundamental son $E^1 = \frac{1}{4}\,(\delta k/k)\,\hbar\,\omega$, $\quad E^2 = -\frac{1}{16}\,(\delta k/k)^2\,\hbar\,\omega$.

b) Cómo se relacionan estas expresiones con la expresión exacta para la energía ?

3. Si los efectos de espín son despreciados, entonces los cuatro estados del átomo de Hidrógeno con $n = 2$ tienen la misma energía E^0. Muestre que cuando se aplica un campo eléctrico ε a los átomos de Hidrógeno estos estados cambian sus energías a primer orden a $E^0 \pm 3a_0e\varepsilon$, E^0, E^0.

4. Un sistema de átomos de Hidrógeno en el estado fundamental está contenido entre las placas de un capacitor plano-paralelo. Se aplica un pulso de voltaje al capacitor de modo que se produce el campo eléctrico homogéneo

$$\varepsilon = 0 \quad t < 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0\,\exp(-t/\tau) \tag{2}$$

a) Muestre que después de un tiempo largo, la fracción de átomos en el estado $2p$ $(m = 0)$ es, a primer orden,

$$\frac{2^{15}\,a_0^2\,e^2\,\varepsilon_0^2}{3^{10}\,\hbar^2\,(\omega^2 + \tau^2)} \tag{3}$$

donde a_0 es el radio de Bohr, y $\hbar\omega$ es la diferencia de energía entre $2p$ y el estado fundamental.

b) Cuál es la fracción de átomos en el estado $2s$?

5. Considere un oscilador armónico unidimensional de masa m, frecuencia angular ω_0 y carga q. Sean $|\,\phi_n>$ y $E_n = (n + 1/2)\,\hbar\,\omega_0$ los autoestados y autovalores de su Hamiltoniano H_0. Para $t < 0$, el oscilador está en el estado fundamental $|\,\phi_0>$. En $t = 0$, se enciende un pulso eléctrico de duración τ. La perturbación correspondiente se puede escribir $W(t) = -q\,\varepsilon\,X$ para $0 \leq t \leq \tau$ y 0 para cualquier otro instante. ε es la amplitud de campo y X es el observable de posición. Sea $\mathcal{P}_{0n}$ la probabilidad de encontrar el oscilador en el estado $|\,\phi_n>$ después del pulso.

a) Calcule $\mathcal{P}_{01}$ usando teoría de perturbación a primer order independiente del tiempo. Cómo varía $\mathcal{P}_{01}$ con τ para un valor fijo de ω_0 ?

b) Muestre que para obtener $\mathcal{P}_{02}$, la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo debe ser empleada al menos hasta segundo orden. Calcular $\mathcal{P}_{02}$ hasta este orden.

c) Calcule las expresiones exactas para $\mathcal{P}_{01}$ y $\mathcal{P}_{02}$ por medio del operador traslación. Al hacer un desarrollo limitado en serie de potencias en ε de estas expresiones, encuentre los resultados de las preguntas precedentes.

6. Considere un sistema de momento angular $j = 1$ y el espacio de estados tridimensional constituído por los tres kets $\{| + >| 0 >| - >\}$, autoestados comunes a $\mathbf{J}^2$ (autovalor de $2\hbar^2$) y J_z (autovalores $+\hbar$, 0 y $-\hbar$). El Hamiltoniano H_0 del sistema es $H_0 = a\, J_z + \frac{b}{\hbar}\, J_z^2$ donde a y b son dos constantes positivas con dimensión de frecuencia angular.

   a) Cuáles son los niveles de energía del sistema ? Para qué valor de b/a hay degeneración ?

   b) Un campo magnético estático $\mathbf{B_0}$ se aplica en la dirección $\mathbf{u}$ con ángulos polares θ y ϕ. La interacción con $\mathbf{B_0}$ del momento magnético del sistema $\mathbf{M} = \gamma\,\mathbf{J}$ es descrita por el Hamiltoniano $W = \omega_0\, J_u$ donde $\omega_0 = -\gamma \mid \mathbf{B_0} \mid$ es la frecuencia angular de Larmor en el campo $\mathbf{B_0}$, y J_u es la componente de $\mathbf{J}$ en la dirección $\mathbf{u}$

$$J_u = J_z\, \cos\theta + J_x\, \sin\theta\, \cos\phi + J_y\, \sin\theta\, \sin\phi \tag{4}$$

   Escriba la matriz que representa W en la base de los tres autoestados de H_0.

   c) Suponga que $b = a$ y que la dirección $\mathbf{u}$ es paralela a Ox. Suponga además que $\omega_0 << a$. Calcule las energías y los autoestados del sistema a primer orden en ω_0 para las energías y a cero orden para los autoestados.

   d) Suponga $b = 2a$ y que nuevamente $\omega_0 << a$, la dirección de $\mathbf{u}$ siendo ahora arbitraria. En la base $\{| + >| 0 >| - >\}$, cuál es el desarrollo del estado fundamental $\mid \psi_0 >$ de $H_0 + W$, a primer orden en ω_0 ?

7. Una parícula de masa m que se mueve en el plano XOY tiene asociado el Hamiltoniano $H_0 = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\,\omega^2\,(X^2 + Y^2)$ (un oscilador armónico en dos dimensiones de frecuencia ω). Estudie el efecto sobre esta partícula de una perturbación W dada por $W = \lambda_1\, W_1 + \lambda_2\, W_2$, donde λ_1 y λ_2 son constantes, y las expresiones para W_1 y W_2 son

$$W_1 = m\,\omega^2\, X\, Y \qquad W_2 = \hbar\,\omega\, \left(\frac{L_z^2}{\hbar^2} - 2 \right) \tag{5}$$

   (L_z es la componente en OZ del momento angular orbital de la partícula). En los cálculos perturbativos considere solo correcciones a primer orden para las energías y de orden cero para los vectores de estado.

   a) Indique, sin hacer cálculos, los autovalores de H_0, sus grados de degeneración y sus autoestados asociados. De aquí en más, considere solamente el segundo estado excitado de H_0, de energía $3\,\hbar\,\omega$ que es degenerado de orden tres.

   b) Calcule las matrices que representan las restricciones de W_1 y W_2 al subespacio de autovalor $3\,\hbar\,\omega$ de H_0.

   c) Suponga $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 << 1$. Calcule, usando teoría de perturbación, el efecto del término $\lambda_1\, W_1$ en el segundo estado excitado de H_0.

d) Compare los resultados obtenidos en c) con el desarrollo limitado de la solución exacta (use los modos normales vibracionales de dos osciladores armónicos acoplados).

e) Suponga que $\lambda_2 << \lambda_1 << 1$. Considere los resultados de la pregunta c) como una situación no perturbada y calcule el efecto del término $\lambda_2 W_2$.

f) Ahora suponga que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 << 1$. Use la teoría de perturbaciones para encontrar el efecto del término $\lambda_2 W_2$ en el segundo estado excitado de H_0.

g) Compare los resultados obtenidos en f) con la solución exacta.

h) Finalmente, suponga que $\lambda_1 << \lambda_2 << 1$. Considere los resultados de la pregunta f) como un nuevo estado sin perturbar y calcule el efecto del término $\lambda_1 W_1$.

8. *a)* Un electrón se encuentra en el estado fundamental de un pozo esférico de profundidad V_0 y radio a. Se aplica un campo eléctrico uniforme $\vec{E_0} cos(\omega t)$ en la dirección de z. Calcule la probabilidad de ionización por unidad de tiempo en función de ω.

   b) Idem, si el campo $\vec{E_0} cos(\omega t)$ se aplica a un electrón de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental.

9. Considere el proceso de desintegración β^- de un núcleo inestable $A \rightarrow B + e^- + \overline{\nu}$. Asuma que una vez emitidos, el electrón y el antineutrino son libres y se comportan como ondas planas, y que la interacción es tal que $H_{if} \simeq gM/V$ (V volumen del laboratorio). Interprete físicamente esta hipótesis. Deduzca usando la *regla de oro* (y fórmulas relativistas para la energía) que la probabilidad por unidad de tiempo, $w(p_e)dp_e$ de que, para un núcleo dado, se produzca una desintegración β^-, en la que el electrón salga con un impulso comprendido entre p_e y $p_e + dp_e$ debe ser:

$$w(p_e)dp_e = \frac{g^2 M^2 p_e^2 (w - p_e)^2 dp_e}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \tag{6}$$

   Calcule entonces la vida media para un neutrón usando esta fórmula.