Práctico 7: Perturbaciones

1. Una partícula de masa m se mueve en un potencial unidimensional de oscilador armónico simple $V^0 = \frac{1}{2}\, k\, x^2$, con frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$. Un término perturbativo pequeño $V^1 = \frac{1}{2}\, \delta k\, x^2$ se suma a V^0.

   a) Muestre que las perturbaciones a primer y segundo orden de la energía del estado fundamental son $E^1 = \frac{1}{4}\, (\delta k/k)\, \hbar\, \omega, \quad E^2 = -\frac{1}{16}\, (\delta k/k)^2\, \hbar\, \omega$.

   b) Cómo se relacionan estas expresiones con la expresión exacta para la energía ?

   c) Considere el hamiltoniano $V(x) = \frac{1}{2}\, k\, x^2 + c\, x^4$ donde el segundo término es pequeño frente al primero. Calcule, a primer orden en c, el efecto del término anharmónico en la energía E_0 del estado fundamental. Qué niveles de energía no son corregidos a primer orden?

   d) Cuál sería el efecto en los niveles de energía, a primer orden, de un término adicional x^3 en el potencial ?

2. * Si los efectos de espín son despreciados, entonces los primeros cuatro estados excitados del átomo de Hidrógeno ($n = 2$) tienen la misma energía E^0.

   a) Muestre que cuando se aplica un campo eléctrico ε a los átomos de Hidrógeno estos estados cambian sus energías a primer orden a $E^0 \pm 3a_0 e\varepsilon$, E^0, E^0.

   b) Calcule las funciones de onda corregidas para $n = 2$.

   c) Calcule el valor medio del momento dipolar eléctrico $\mathbf{p}$ = - e $\mathbf{r}$ para los estados corregidos. El resultado es independiente del campo eléctrico aplicado, lo que muestra que el hidrógeno puede tener un momento dipolar eléctrico permanente en los primeros estados excitados.

3. Considere un sistema de momento angular $j = 1$ y el espacio de estados tridimensional constituído por los tres kets $\{| + > | \, 0 > | - >\}$, autoestados comunes a $\mathbf{J}^2$ (autovalor de $2\hbar^2$) y J_z (autovalores $+\hbar$, 0 y $-\hbar$). El Hamiltoniano H_0 del sistema es $H_0 = a\, J_z + \frac{b}{\hbar}\, J_z^2$ donde a y b son dos constantes positivas con dimensión de frecuencia angular.

   a) Cuáles son los niveles de energía del sistema ? Para qué valor de b/a hay degeneración ?

   b) Un campo magnético estático $\mathbf{B_0}$ se aplica en la dirección $\mathbf{u}$ con ángulos polares θ y ϕ. La interacción con $\mathbf{B_0}$ del momento magnético del sistema $\mathbf{M} = \gamma\, \mathbf{J}$ es descrita por el Hamiltoniano $W = \omega_0\, J_u$ donde $\omega_0 = -\gamma\ |\, \mathbf{B_0}\, |$ es la frecuencia angular de Larmor en el campo $\mathbf{B_0}$, y J_u es la componente de $\mathbf{J}$ en la dirección $\mathbf{u}$, $J_u = J_z \cos\theta + J_x \sin\theta \cos\phi + J_y \sin\theta \sin\phi$

   Escriba la matriz que representa W en la base de los tres autoestados de H_0.

   c) Suponga que $b = a$ y que la dirección $\mathbf{u}$ es paralela a Ox. Suponga además que $\omega_0 << a$. Calcule las energías y los autoestados del sistema a primer orden en ω_0 para las energías y a cero orden para los autoestados.

   d) Suponga $b = 2a$ y que nuevamente $\omega_0 << a$, la dirección de $\mathbf{u}$ siendo ahora arbitraria. En la base $\{| + > | \, 0 > | - >\}$, cuál es el desarrollo del estado fundamental $| \, \psi_0 >$ de $H_0 + W$, a primer orden en ω_0 ?

4. Una parícula de masa m que se mueve en el plano XOY tiene asociado el Hamiltoniano $H_0 = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, (X^2 + Y^2)$ (un oscilador armónico en dos dimensiones de frecuencia ω). Estudie el efecto sobre esta partícula de una perturbación W dada por $W = \lambda_1\, W_1 + \lambda_2\, W_2$, donde λ_1 y λ_2 son constantes, y las expresiones para W_1 y W_2 son

$$W_1 = m\, \omega^2\, X\, Y \qquad W_2 = \hbar\, \omega\, \left(\frac{L_z^2}{\hbar^2} - 2\right)$$

(L_z es la componente en OZ del momento angular orbital de la partícula). En los cálculos perturbativos considere solamente correcciones a primer orden para las energías.

a) Indique, sin hacer cálculos, los autovalores de H_0, sus grados de degeneración y sus autoestados asociados. De aquí en más, considere solamente el segundo estado excitado de H_0, de energía $3\, \hbar\, \omega$ que es degenerado de orden tres.

b) Calcule las matrices que representan las restricciones de W_1 y W_2 al subespacio de autovalor $3\, \hbar\, \omega$ de H_0.

c) Suponga $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 << 1$. Calcule, usando teoría de perturbación, el efecto del término $\lambda_1\, W_1$ en el segundo estado excitado de H_0.

d) Compare los resultados obtenidos en c) con el desarrollo limitado de la solución exacta (use los modos normales vibracionales de dos osciladores armónicos acoplados).

e) Suponga que $\lambda_2 << \lambda_1 << 1$. Considere los resultados de la pregunta c) como una situación no perturbada y calcule el efecto del término $\lambda_2\, W_2$.

f) Ahora suponga que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 << 1$. Use la teoría de perturbaciones para encontrar el efecto del término $\lambda_2\, W_2$ en el segundo estado excitado de H_0.

g) Compare los resultados obtenidos en f) con la solución exacta.

h) Finalmente, suponga que $\lambda_1 << \lambda_2 << 1$. Considere los resultados de la pregunta f) como un nuevo estado sin perturbar y calcule el efecto del término $\lambda_1\, W_1$.

5. * Si la energía del estado fundamental del Helio es E = - 79 eV, calcule la energía de ionización del Helio (energía necesaria para remover un electrón).

6. * *a)* Un electrón se encuentra en el estado fundamental de un pozo esférico de profundidad V_0 y radio a. Se aplica un campo eléctrico uniforme $\vec{E_0} cos(\omega t)$ en la dirección de z. Calcule la probabilidad de ionización por unidad de tiempo en función de ω.

   b) Idem, si el campo $\vec{E_0} cos(\omega t)$ se aplica a un electrón de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental.

7. Considere el proceso de desintegración β^- de un núcleo inestable $A \to B + e^- + \overline{\nu}$. Asuma que una vez emitidos, el electrón y el antineutrino son libres y se comportan como ondas planas, y que la interacción es tal que $H_{if} \simeq gM/V$ (V volumen del laboratorio). Interprete físicamente esta hipótesis. Deduzca usando la *regla de oro* (y fórmulas relativistas para la energía) que la probabilidad por unidad de tiempo, $w(p_e)dp_e$ de que, para un núcleo dado, se produzca una desintegración β^-, en la que el electrón salga con un impulso comprendido entre p_e y $p_e + dp_e$ debe ser:

$$w(p_e)dp_e = \frac{g^2 M^2 p_e^2 (w - p_e)^2 dp_e}{2\pi^3 \hbar^7 c^3}$$

   Calcule entonces la vida media para un neutrón usando esta fórmula.

8. Calcule la vida media de los primeros cuatro estados excitados del átomo de hidrógeno. El resultado es $1.69x10^{-9} sec$, excepto para Ψ_{200} que es infinto. Qué significa este resultado?