

## MECÁNICA ESTADÍSTICA - 1

### PROBLEMAS

(los problemas con \* se entregan hasta el 17 setiembre 2003)

1. Se sientan  $n$  personas al azar en una fila. Calcule la probabilidad de que dos de ellas determinadas queden una al lado de la otra.
2. 40 cartas se reparten entre 4 personas, y hay 4 ases. Calcule la probabilidad de que a cada una le toque una as.
3. \* Considere un grupo de  $r$  personas; calcule la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día. Grafique los valores obtenidos para  $r=1, \dots, 50$  y calcule a partir de que valor de  $r$  esta probabilidad es mayor que 0.5.
4. Considere una variable binomial  $X$  igual al número de éxitos en una sucesión de  $n$  pruebas de Bernoulli; frecuencia de éxitos es  $X/n$ . Demuestre:
  - 4.1  $P(|X/n-p| \geq k(pq/n)^{1/2}) \leq 1/k^2$
  - 4.2  $P(|X/n-p| \geq \varepsilon) \leq pq/n\varepsilon^2$
  - 4.3 Demuestre que  $pq \leq 1/4$ , y
    - a) Se lanza una moneda 1000 veces; acote la probabilidad de que salga cara un número de veces entre 450 y 550.
    - b) ¿Cuántas veces hay que tirar un dado para que, con probabilidad mayor que 0.9, la frecuencia relativa con que salga el número 1 difiera de la probabilidad teórica  $1/6$  menos de 0.01?
    - c) Se desea averiguar el porcentaje de fumadores de una cierta población. Para ello se eligen  $n$  personas al azar y se calcula la frecuencia de fumadores en este grupo. ¿Qué valor debe tener  $n$  para que esta frecuencia no difiera de la real en más de 0.005 con una probabilidad mayor que 0.95?
5. Considere una sociedad en donde las familias tienen hijos hasta el nacimiento de la primera hija. Calcule en número medio de hijos por familia, el número medio de hijos varones y mujeres y la fracción hombres/mujeres en esa sociedad.
6. Una fábrica produce piezas con  $p=0.02$  de que una de ellas sea defectuosa. Calcule:
  - a) la probabilidad de que un lote de 100 piezas no tenga ninguna defectuosa
  - b) ídem, pero 3 defectuosas
  - c) calcule lo anterior pero usando la aproximación de Poisson.
7. \* El número de partículas emitidas por una sustancia radioactiva por segundo sigue una distribución de Poisson; la emisión ocurre a un

ritmo de 30 partículas por minuto. Calcule la probabilidad de que en 7.5 segundos se emitan 3 partículas.

8. Un líquido contiene 4 bacterias por  $\text{cm}^3$ , calcule la probabilidad de tener 1  $\text{cm}^3$  sin bacterias y la probabilidad de tener en 0.5  $\text{cm}^3$  por lo menos una bacteria.
9. Se lanza un dado 100 veces. Calcule la probabilidad de que salga en número 6 más de 20 veces. Calcule exactamente y usando la aproximación normal.
- 10.\* Considere un camino al azar con probabilidad  $\frac{1}{2}$  de quedarse en el lugar y  $\frac{1}{4}$  de dar un paso a la izquierda o derecha. Calcule la posición media y su dispersión al cabo de N pasos.
- 11.\* Considere un camino al azar en una dimensión en que cada paso tiene una distribución normal de media L y dispersión  $\sigma$ . Al cabo de N pasos calcule el valor medio de la distancia al origen y su dispersión.