Manual del Mecanico Celeste

version 3, noviembre 2002

Tabare Gallardo

Producido bajo los efectos de la doxorrubicina, bleomicina, vinblastina y dacarbazina.

1. Dinamica del punto

Momento lineal: $\vec{p} = m\vec{v}$. Sea m en la posicion $\vec{r}$ respecto de O, defino *momento angular* respecto de O: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. *Energia cinetica*: $T = \frac{1}{2}mv^2$. Si el punto esta sometido a una fuerza $\vec{F}$, el *trabajo* realizado por la fuerza es:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$$

siendo $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ la *potencia*. Si $\vec{F} = -m\nabla V$, la funcion $V(\vec{r})$ es el *potencial* y $\vec{F}$ es conservativa pues:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = mV(A) - mV(B) = \mathcal{E}_P(A) - \mathcal{E}_P(B)$$

siendo $\mathcal{E}_P$ la *energia potencial* de m.
Segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

de donde defino *impulso*: $\Delta\vec{p} = \int \vec{F}dt$ y de donde tambien:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

y de donde si $m = cte$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = T_B - T_A$$

por lo que si la fuerza deriva de un potencial tenemos:

$$W_{AB} = T_B - T_A = \mathcal{E}_P(A) - \mathcal{E}_P(B)$$

Gradiente en diferentes coordenadas:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$$

($\theta = 90^o - \phi$ es colatitud y φ angulo acimutal)

2. Planeta rigido

Potencial generado en $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$V(\vec{r}) = -\mathcal{G}\int_M \frac{dm(\vec{s})}{\mid \vec{s} - \vec{r} \mid}$$

Campo gravitacional en $\vec{r}$ generado por el planeta:

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla V(\vec{r})$$

Energia potencial del planeta

$$\mathcal{E}_P = \int_M V(\vec{s})dm(\vec{s})$$

que para una esfera homogenea es

$$\mathcal{E}_P = -\frac{3}{5}\frac{\mathcal{G}M^2}{R}$$

Potencial de planeta con simetria de revolucion con radio ecuatorial R, latitud ϕ, caso $r \gg R$:

$$V_p(r, \phi) \simeq -\frac{\mathcal{G}M}{r}\Big(1 - J_2\Big(\frac{R}{r}\Big)^2\frac{(3\sin^2\phi - 1)}{2} + \dots\Big)$$

Formula de MacCullagh para planeta cuasi esferico y para $r \gg R$:

$$V_p(\vec{r}) \simeq -\frac{\mathcal{G}M}{r} - \frac{\mathcal{G}(A + B + C - 3I)}{2r^3}$$

con I momento de inercia en la direccion de $\hat{r}$:

$$\hat{r}\mathbf{I}\hat{r} = I = (Ax^2 + By^2 + Cz^2)/r^2$$

Siendo $\mathbf{I}$ el tensor de inercia. Para esfera homogenea

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Si $A = B$

$$J_2 \simeq \frac{C - A}{MR^2}$$

El sistema de referencia es no inercial definido por los ejes ppales de inercia que rota con $\vec{\omega}$, por lo tanto

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Momento angular

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$$

Energia cinetica rotacional

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

Potencial rotacional para los puntos de la superficie ($r \simeq R$):

$$V_{rot}(r, \phi) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\phi$$

Potencial superficial total:

$$V_{tot}(r, \phi) = V_p(r, \phi) + V_{rot}(r, \phi)$$

3. Planeta no rigido: deformacion rotacional

Un planeta esferico rotante tiende a seguir una superficie de equipotencial cuya forma puede deducirse de:

$$V_{tot} \simeq V_p(R) + \frac{\partial V_p}{\partial r}\Big|_R \delta r + V_{rot}(R,\phi) + \frac{\partial V_{rot}}{\partial r}\Big|_R \delta r = cte$$

resultando

$$\delta r \simeq \frac{\omega^2 R^4}{2\mathcal{G}M}\cos^2\phi$$

Limite para velocidad rotacional:

$$\nabla V_{tot}(R,0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega^2_{max} = \frac{\mathcal{G}M}{R^3}$$

4. Planeta rigido y satelite puntual: intercambio de momento angular

El satelite puntual m (o esferico con densidad radial) ubicado en la posicion $\vec{r}$ respecto al baricentro O del planeta experimenta una fuerza

$$\vec{F} = -m\nabla V(\vec{r})$$

El planeta M experimentara un momento

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times (-\vec{F})$$

que producira una variacion en el momento angular $\vec{L_p}$ del planeta:

$$\frac{d\vec{L_p}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}$$

Momento angular total del sistema:

$$\vec{L_p} + \vec{L_s} + \vec{L_{orb}} = cte$$

pero $\vec{L_s} = cte$ siempre por ser puntual o de simetria radial, entonces:

$$\frac{d\vec{L_p}}{dt} + \frac{d\vec{L_{orb}}}{dt} = 0$$

donde

$$\vec{L_{orb}} = m_r \vec{r} \times \vec{v}$$

siendo m_r la masa reducida y v la velocidad orbital del satelite referida al baricentro del planeta (y respecto a un sistema no rotante).

Energia total del sistema:

$$E = E_{rot} + E_{orb}$$

donde

$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\mathbf{I}\vec{\omega}$: energia cinetica rotacional del planeta

$E_{orb} = T_B + E_{pot}$

$T_B = \frac{1}{2}m_r v^2$: energia cinetica baricentrica del sistema

$E_{pot} = V(r)m$: energia potencial de interaccion

Si planeta y satelite son rigidos las energias potenciales de ambos cuerpos seran constantes y podemos obviarlas. Si planeta y satelite estan suficientemente alejados podemos asumir $V(r) = -\mathcal{G}M/r$ con lo cual nos remite al problema de 2 cuerpos resultando

$$E_{orb} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{2a}$$

siendo a el semieje mayor de la orbita relativa. Finalmente

$$E = \frac{1}{2}\vec{\omega}\mathbf{I}\vec{\omega} - \mathcal{G}\frac{Mm}{2a} = cte$$

5. Planeta no rigido y satelite: deformacion de mareas

Se aplica al caso de un planeta no rigido afectado por el potencial V_s generado por un satelite S de masa m ubicado a una distancia $a = OS$. El punto P del planeta localizado en $\vec{\rho} = \vec{SP}$ respecto al satelite y en $\vec{r} = \vec{OP}$ respecto al planeta experimentara debido al satelite un campo proporcional a $\nabla V_s(\vec{r})$ donde

$$V_s = -\frac{\mathcal{G}m}{\rho} = -\frac{\mathcal{G}m}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{a})^n P_n(\cos\psi)$$

siendo ψ el angulo $\widehat{POS}$, donde $\psi = \phi$ solo si el satelite es ecuatorial. Considerando $r \simeq R$ los terminos para $n = 0, 1$ son constantes para todos los puntos del planeta por lo cual el potencial de mareas corresponde a los terminos $n = 2, \ldots \infty$. Si consideramos solo $n = 2$ tenemos

$$V_{tidal}(r,\psi) \simeq -\mathcal{G}\frac{m}{a^3}r^2\frac{(3\cos^2\psi - 1)}{2}$$

Potencial total superficial

$$V_{tot}(r,\phi) \simeq V_p(r,\phi) + V_{tidal}(r,\psi)$$

El planeta tiende a seguir superficies de equipotencial cuya forma puede deducirse de

$$V_{tot} \simeq V_p(R) + \frac{\partial V_p}{\partial r}\Big|_R \delta r + V_{tid}(R,\psi) + \frac{\partial V_{tid}}{\partial r}\Big|_R \delta r = cte$$

resultando

$$\delta r \simeq \frac{3mR^4}{2Ma^3}\cos^2\psi$$

Parte de la energia mecanica se disipa en calor por friccion de mareas por lo cual (si estan suficientemente alejados)

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\vec{\omega}\mathbf{I}\vec{\omega} - \mathcal{G}\frac{Mm}{2a}) < 0$$

donde a es el semieje mayor de la orbita relativa.

Si existe rotacion el campo gravitacional total superficial sera:

$$\nabla V_{tot} = \nabla V_p + \nabla V_{tidal} + \nabla V_{rot}$$

Limite de Roche: cuando el campo gravitacional superficial total ecuatorial de un satelite es nulo

$$\frac{\mathcal{G}m}{R_s^2} = \frac{\mathcal{G}M}{a^3}2R_s + \omega_s^2 R_s$$

el satelite solo se podra mantener entero por cohesion del material resultando

$$a_L = (\frac{2M}{m})^{1/3}R_s \quad \text{o} \quad a_L = (\frac{3M}{m})^{1/3}R_s$$

segun si despreciamos rotacion del satelite o si la suponemos sincronica respectivamente.

6. Dos cuerpos

Tomando como origen el baricentro se cumple:

$$m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} = 0 \qquad m_1\dot{\vec{r_1}} + m_2\dot{\vec{r_2}} = 0$$

Tomando origen en m_1 llegamos a la ecuacion de movimiento relativo con $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$$\ddot{\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$. Usando masas solares, UAs y dias: $\mathcal{G} = k^2 = 0.01720209895^2$. Multiplicando vectorialmente la ecuacion de movimiento por $\vec{r}$ obtenemos la *integral de momento angular*:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = r^2\dot{f}\hat{z} = \vec{h} = 2\frac{dA}{dt}\hat{z}$$

Vector excentricidad hacia el pericentro:

$$\vec{e} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} - \hat{r} = cte$$

Solucion de la ecuacion de movimiento:

$$r = \frac{h^2/\mu}{(1 + e\cos f)}$$

con $h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$. Multiplicando escalarmente la ecuacion de movimiento por $\vec{r}$ obtenemos la *vis viva integral*

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} = \mathcal{C}$$

Energia sistema = cinetica baric + potencial:

$$E = \frac{1}{2}m_r v^2 - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r} = m_r\mathcal{C} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{2a}$$

Momento de inercia sistema $I = m_r r^2$
Momento angular sistema $\vec{L} = m_r\vec{h}$
siendo

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

la masa reducida. Si $m_2 \ll m_1$, $\mathcal{C}$ resulta la energia por unidad de masa para m_2 y $\vec{h}$ el momento angular por unidad de masa para m_2.

Para el **caso eliptico** vale:

$$h = \frac{2A_{elipse}}{T} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}$$

de donde defino

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\mu/a^3}$$

Dependencia $f(t), r(t)$:
$r = a(1 - e\cos E)$
$M = n(t-\tau) = E - e\sin E$
$n = \frac{dM}{dt}$
$f = M + 2e\sin + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \ldots$

Encuentro hiperbolico con parametro de impacto σ, angulo de deflexion γ:

$$h = \sigma v_\infty \qquad a = -\frac{\mu}{v_\infty^2}$$

$$e^2 - 1 = \frac{\sigma^2}{a^2} = (\cot\frac{\gamma}{2})^2$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = -\cos f_\infty = \frac{1}{e}$$

Condicion de colision $\sigma \leq R\sqrt{1 - 2a/R}$

Dependencia $f(t), r(t)$:
$r = a(1 - e\cosh F)$
$\nu(t-\tau) = e\sinh F - F$
$\nu = \sqrt{-\mu/a^3} = v_\infty^3/\mu$

Caso parabolico
$Z = \tan\frac{f}{2}$
$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t-\tau) = \frac{1}{3}Z^3 + Z$

7. Orbita en el espacio

Si $\hat{N} = (\cos\Omega, \sin\Omega, 0)$, entonces:

$$\vec{h}\cdot\hat{z} = h\cos i$$

$$\hat{z}\times\hat{h} = \hat{N}\sin i$$

$$\hat{N}\cdot\vec{e} = e\cos\omega$$

$$\hat{N}\times\vec{e} = e\sin\omega\hat{h}$$

longitud del pericentro: $\varpi = \Omega + \omega$
longitud media: $\lambda = \varpi + M$
longitud verdadera: $L = \varpi + f$

Funciones `f` y `g`:
$\vec{r}(t) = \mathtt{f}\vec{r}_0 + \mathtt{g}\vec{v}_0$
$\vec{v}(t) = \dot{\mathtt{f}}\vec{r}_0 + \dot{\mathtt{g}}\vec{v}_0$

Inclinacion mutua I entre 2 orbitas:

$$\cos I = \hat{h_1}\cdot\hat{h_2} = \sin i_2\sin i_1\cos(\Omega_2 - \Omega_1) + \cos i_2\cos i_1$$

8. Orbita perturbada

Dada la perturbacion

$$d\vec{F} = R\hat{r} + T\hat{\theta} + N\hat{z}$$

tenemos

$$\dot{\mathcal{C}} = \dot{\vec{r}} \cdot d\vec{F} = \dot{r}R + r\dot{f}T$$

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{r} \times d\vec{F} = rT\hat{z} - rN\vec{\theta}$$

9. Formulacion Hamiltoniana 2 cuerpos

Dados $\vec{r}, \vec{v}$ relativas definimos el momento lineal del sistema como $\vec{p} = m_r\vec{v}$ que resulta canonicamente conjugado de $\vec{r}$, siendo m_r la masa reducida del sistema

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m_r} - \frac{\mu m_r}{r}$$

Variables de Delaunay

$$(l, g, h) = (M, \omega, \Omega)$$

$$(L, G, H) = m_r\sqrt{\mu a}\Big(1, \sqrt{1-e^2}, \sqrt{1-e^2}\cos i\Big)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2 m_r^3}{2L^2}$$

Variables de Poincare

$$(\lambda, \gamma, z) = (M + \omega + \Omega, -\omega - \Omega, -\Omega)$$

$$(\Lambda, \Gamma, Z) = (L, L - G, G - H)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2 m_r^3}{2\Lambda^2}$$

Variables excentricas y oblicuas

$$(h, k) = \sqrt{2\Gamma}(\cos\gamma, \sin\gamma)$$

$$(p, q) = \sqrt{2Z}(\cos z, \sin z)$$

10. Tres cuerpos restringido circular

Unidades tales que: $a = 1$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$, $T = 2\pi$, ($\omega = n = 1$) Notacion: $\mu_2 = \mu$, $\mu_1 = 1 - \mu$ Sistema baricentrico rotante (x, y, z), e inercial (ξ, η, ζ). De

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{dU}{dt}$$

se deduce la Integral de Jacobi

$$C_J = 2U - v^2$$

siendo

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + (\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2})$$

el pseudo-potencial y $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ la velocidad en el rotante. En funcion de $\vec{r}, \vec{V}$ inerciales la energia por unidad de masa para la particula resulta:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}V^2 - \Big(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\Big) = \vec{h} \cdot \vec{\omega} - \frac{1}{2}C_J$$

que no es constante.

Parametro de **Tisserand** y velocidad de encuentro. Si despreciamos $\mu(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2})$ resulta

$$C_J = \frac{a_p}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_p}(1-e^2)}\cos I = T$$

Velocidad relativa de encuentro al infinito (proximo al planeta pero siendo despreciable su potencial):

$v_\infty = U = \sqrt{3 - T} \rightarrow$ si $T > 3$ no puede haber encuentro. $T \leq 3$ es condicion necesaria pero no suficiente para que haya encuentro. Componentes de U en el sistema rotante y en las unidades del P3C :

$U_x = \pm\sqrt{2 - 1/a - a(1-e^2)}$

$U_y = \sqrt{a(1-e^2)}\cos I - 1$

$U_z = \pm\sqrt{a(1-e^2)}\sin I$

Puntos de equilibrio, distancias a μ:

$r_2(L_1) = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \ldots$

$r_2(L_2) = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \ldots$

$\alpha = \left(\frac{\mu_2}{3\mu_1}\right)^{1/3}$

$r_2(L_3) = 2 - \frac{7}{12}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{7}{12}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 - \ldots$

Constante de Jacobi para los puntos de equilibrio:

$C_J(L_1) \simeq 3 + 3^{4/3}\mu^{2/3} - 10\mu/3$

$C_J(L_2) \simeq 3 + 3^{4/3}\mu^{2/3} - 14\mu/3$

$C_J(L_3) \simeq 3 + \mu$

$C_J(L_4) \simeq 3 - \mu$

$C_J(L_5) \simeq 3 - \mu$

Troyanos: estables si $\mu < 0.0385$ con periodos de libracion en revoluciones planetarias

$$P_{sp} = (1 - 27\mu/4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$P_{lp} = (27\mu/4)^{-\frac{1}{2}}$$

Esfera de Hill en torno de μ: $R_H = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

11. Teoria secular lineal para el sistema planetario

Bajo el efecto de los N planetas, la evolucion secular del planeta j en las variables $(h, k) = (e\cos\varpi, e\sin\varpi)$ y $(p, q) = (i\cos\Omega, i\sin\Omega)$ puede ser descripta como:

$$h_j = \sum_{i=1}^{N} E_{ji}\sin(g_i t + \beta_i), \qquad k_j = \sum_{i=1}^{N} E_{ji}\cos(g_i t + \beta_i)$$

$$p_j = \sum_{i=1}^{N} I_{ji} \sin(s_i t + \gamma_i), \qquad q_j = \sum_{i=1}^{N} I_{ji} \cos(s_i t + \gamma_i)$$

donde las g_i, s_i son las frecuencias fundamentales del sistema cuya influencia en el planeta j estara dada por el valor de los coeficientes E_{ji}, I_{ji}. Los a_j no tienen evolucion secular.

Frecuencias fundamentales del Sistema Solar despreciando Pluton en ciclos por millon de años. Valores relativistas (Laskar) y no relativistas (yo).

k	g_k^r	s_k^r	g_k	s_k
1	4.30	-4.32	4.02	-4.24
2	5.75	-5.44	5.66	-5.03
3	13.41	-14.54	13.34	-14.54
4	13.83	-13.70	13.77	-13.70
5	3.28	0	3.29	0
6	21.79	-20.32	21.80	-20.33
7	2.37	-2.30	2.38	-2.31
8	0.51	-0.53	0.52	-0.53

La componente $s_5 = 0$ implica un termino constante, se encuentra presente en todos los p_j, q_j con igual amplitud I_{j5}. Esto implica que todos los planetas tienen en el plano (p, q) su centro de oscilacion desplazado del origen. Usando como referencia el plano de la ecliptica este desplazamiento es tan grande que todos los Ω_j libran en vez de circular. Usando el plano invariable el desplazamiento es menor y los nodos circulan. Las fecuencias fundamentales no son las frecuencias de oscilacion de perihelio o nodo que son el resultado de la suma de 8 terminos.

12. Teoria secular lineal para una particula

La evolucion secular de una particula orbitando el Sol y pertubada por N planetas en las variables h, k, p, q puede ser descripta como:

$$h = e_{prop} \sin(At + \beta) + h_{forz}(t) = e \sin \varpi$$

$$k = e_{prop} \cos(At + \beta) + k_{forz}(t) = e \cos \varpi$$

$$p = i_{prop} \sin(-At + \gamma) + p_{forz}(t) = i \sin \Omega$$

$$q = i_{prop} \cos(-At + \gamma) + q_{forz}(t) = i \cos \Omega$$

siendo

$$h_{forz} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\nu_i}{A - g_i} \sin(g_i t + \beta_i)$$

$$k_{forz} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\nu_i}{A - g_i} \cos(g_i t + \beta_i)$$

$$p_{forz} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{-A - s_i} \sin(s_i t + \gamma_i)$$

$$q_{forz} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{-A - s_i} \cos(s_i t + \gamma_i)$$

con $a, e_{prop}, i_{prop}, A, \beta, \gamma$ constantes dependientes de la particula, $g_i, s_i, \beta_i, \gamma_i$ frecuencias fundamentales y fases del sistema planetario y ν_i, μ_i dependientes del sistema y del a de la particula. El termino propio oscila con frecuencia A y el termino forzado es una composicion de terminos de varias frecuencias. Las eventuales variaciones en los elementos propios son debidas a la difusion caotica. Si los terminos forzados son pequeños se observara aproximadamente $\dot{\Omega} = -\dot{\varpi} < 0$. Cuando $e_{prop} < e_{forz}$ se observara ϖ librando en torno de un ϖ_{forz} que tambien varia con el tiempo. Cuando $i_{prop} < i_{forz}$ se observara Ω librando en torno de un Ω_{forz} que tambien varia con el tiempo. Los terminos forzados dependen del a de la particula y del tiempo, por lo que para un determinado instante asteroides con igual semieje suelen presentar iguales terminos forzados (fenomeno observado).

Cuando $a \to a_{planeta}$ la teoria predice

$e_{forz} \to e_{planeta}$

$\varpi_{forz} \to \varpi_{planeta}$

$i_{forz} \to i_{planeta}$

$\Omega_{forz} \to \Omega_{planeta}$

De acuerdo a las ecuaciones planetarias de Lagrange tambien tenemos que si:

$e \to 0 \qquad |\dot{\varpi}| \to \infty$

$i \to 0 \qquad |\dot{\Omega}| \to \infty$

13. Resonancias seculares

Resonancia de perihelio: cuando $\dot{\varpi}_{prop} = A \to g_k$ tenemos $e_{forz} \to \infty$ y e oscilara en torno de grandes valores con frecuencia $\sim g_k$ y probablemente ϖ circule con la misma frecuencia. Resonancia de nodo: cuando $\dot{\Omega}_{prop} = -A \to s_k$ tenemos $i_{forz} \to \infty$ y i oscilara en torno de grandes valores con frecuencia $\sim s_k$ y probablemente Ω circule con la misma frecuencia. Son periodos del orden de $10^5 - 10^6$ años.

La determinacion experimental de una resonancia secular no es trivial pues implica encontrar la frecuencia A de variacion de los elementos propios y demostrar su igualdad con alguna g_k, s_k. Notese que los elementos propios no son los osculantes. Notacion: resonancia ν_6 es la resonancia de ϖ con $k = 6$, siendo el angulo critico $\sigma_6 = \varpi - g_6 t$. Resonancia ν_{16} es la resonancia de Ω con $k = 6$, siendo el angulo critico $\sigma_{16} = \Omega - s_6 t$.
Teoria no lineal: cuando

$$A \to comb.lineal(g_i, s_i)$$

aparecen terminos forzados de orden superior que pueden tender a infinito.

14. Resonancias de movimientos medios

Los periodos de libracion son de $10^2 - 10^3$ de años.

grado $p = \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots$

si $p < 0$ resonancia exterior a la orbita del planeta

si $p > 0$ resonancia interior a la orbita del planeta

orden $q = 0, 1, 2, \ldots$

Para $q = 1$, σ tiene centro de libracion en 0 y 180. Para $q = 2$, σ tiene centro de libracion en 90 y 270. Las resonancias exteriores tipo $1 : N$ tienen centros asimetricos (dependen de e).

La resonancia $(p+q) : p$ verifica: $(p+q)n_p - pn \simeq 0$ lo cual implica

$$a \simeq a_p \Big(\frac{p}{p+q}\Big)^{2/3}$$

Angulo critico de **resonancia tipo excentricidad**: $\sigma = (p+q)\lambda_p - p\lambda - q\varpi$, el termino perturbador resonante es proporcional a e^q. Angulo critico de **resonancia tipo inclinacion** (solo existe para $q > 1$): $\sigma = (p+q)\lambda_p - p\lambda - q\Omega$, el termino perturbador resonante es proporcional a i^q. Si el plano de referencia no coincide exactamente con la orbita del planeta, para pequeñas i el Ω puede parecer librar en vez de circular. Esto es debido a que en la evolucion secular de Ω hay una componente propia y otra forzada. Si son varios planetas es recomendable el plano invariable como referencia. Las resonancias expresadas en las variables $(e\cos\sigma, e\sin\sigma)$ y $(i\cos\sigma, i\sin\sigma)$ presentan componentes forzadas (con frecuencias $\sim g_j$ y $\sim s_j$ respectivamente) y una propia (la libracion).

Troyanos ($q = 0$): $\sigma = \lambda - \lambda_p$

Nota: al calcularlos los σ siempre deben ser mantenidos en un rango de 360°.

15. Resonancia de 2 planetas masivos

Para $q = 1$ los angulos criticos pueden ser:

$(p+1)\lambda_1 - p\lambda_2 - \varpi_1$

$(p+1)\lambda_1 - p\lambda_2 - \varpi_2$

Para $q = 2$ los angulos criticos pueden ser:

$(p+2)\lambda_1 - p\lambda_2 - 2\varpi_1$

$(p+2)\lambda_1 - p\lambda_2 - 2\varpi_2$

$(p+2)\lambda_1 - p\lambda_2 - 2\Omega_1$

$(p+2)\lambda_1 - p\lambda_2 - 2\Omega_2$

$(p+2)\lambda_1 - p\lambda_2 - \varpi_1 - \varpi_2$

$(p+2)\lambda_1 - p\lambda_2 - \Omega_1 - \Omega_2$

16. Resonancia de Kozai

Es una perturbacion secular para altas inclinaciones y verifica $a \sim cte$ y $\dot\varpi = \dot\Omega$ de donde $\dot\omega = 0$ oscilando en torno de $\omega = 90°$ y $\omega = 270°$. Se producen oscilaciones acopladas de e, i tal que $H_K = \sqrt{1-e^2}\cos i \simeq cte$. Para inclinaciones bajas tambien puede haber resonancia pero con ω oscilando en torno de $\omega = 0°$ y $\omega = 180°$.

17. N cuerpos

Se define funcion fuerza del sistema:

$$U = k^2 \sum_{i<j}\sum_{j=1}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = -\mathcal{E}_{pot}$$

El potencial a que esta sometido m_i es:

$$V_i = -k^2 \sum_{j\neq i} \frac{m_j}{r_{ij}}$$

Ecuacion de movimiento en sistema inercial:

$$m_i\ddot{\vec{r_i}} = -m_i\nabla V_i = \nabla_i U = -k^2 m_i \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{\vec{r_i} - \vec{r_j}}{r_{ij}^3}$$

Momento angular sistema:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r_i} \times \dot{\vec{r_i}} = \vec{L} = cte$$

De

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{r_i}} \cdot \ddot{\vec{r_i}} = \frac{dU}{dt}$$

se deduce la energia del sistema

$$E = T - U = cte$$

Teorema del virial: sea

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

resulta

$$\ddot{I} = 2U + 4E = 2T + 2E$$

condicion de equilibrio

$$<\ddot{I}>_t = 0 \quad \Rightarrow \quad <T>_t = <U/2>_t$$

Hamiltoniano del sistema:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j^2}{2m_j} - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{r_{ij}}$$

Transferencia del origen al Sol (sistema no inercial):

$$\ddot{\vec{r_i}} + k^2(m_n + m_i)\frac{\vec{r_i}}{r_i^3} = k^2 \sum_{j\neq i}^{n-1} m_j \Big(\frac{\vec{r_j} - \vec{r_i}}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r_j}}{r_j^3}\Big)$$

que tambien se escribe como:

$$\ddot{\vec{r_i}} + k^2(m_n + m_i)\frac{\vec{r_i}}{r_i^3} = \sum_{j\neq i}^{n-1} m_j \nabla_i R_{ij}$$

donde

$$R_{ij} = k^2\Big(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{\vec{r_i}\cdot\vec{r_j}}{r_j^3}\Big)$$

son las *funciones perturbadoras* debidas a las masas m_j que suelen expresarse en funcion de los elementos orbitales heliocentricos de i y j.

18. Sistema Hamiltoniano

El problema de N cuerpos espacial es un sistema hamiltoniano de 3N grados de libertad siendo el espacio de fases 6N dimensional. Considerando que $\mathcal{H} = cte$ las trayectorias en el espacio de fases tendran (6N-1) dimensiones. En general

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \ldots, q_{3N}, p_1, \ldots, p_{3N}) = cte$$

pero si el sistema es integrable existe una transformacion canonica a las variables angulo-accion (θ_i, J_i):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(J_1, \ldots, J_{3N})$$

resultando las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i} = \nu_i = cte$$

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i} = 0$$

donde las $\nu_i(J_1, \ldots, J_{3N})$ son las frecuencias fundamentales. La solucion es trivial: las J_i son constantes y los θ_i crecen linealmente con el tiempo. En el sistema planetario las 3N frecuencias fundamentales son las g_i, s_i (que determinan la evolucion a largo plazo) y las n_i (movimientos medios) siendo estas ultimas ignoradas o filtradas por ser de alta frecuencia. Todas las demas frecuencias que aparezcan en la evolucion de los N cuerpos seran combinaciones de estas 3N fundamentales.

19. Bibliografia

Solar System Dynamics, Murray and Dermott
Celestial Mechanics, Danby
Astrophysical Concepts, Harwitt

Se agradece reportar sugerencias y errores a
gallardo@fisica.edu.uy
www.fisica.edu.uy/˜gallardo
