MECANICA CELESTE

PRACTICO IV
PROBLEMA DE DOS CUERPOS (b)

1. RESOLUCION DE LA ECUACION DE KEPLER
   Una ecuación de la forma $x = Y(x)$ puede resolverse por un algoritmo de iteración del tipo $x_{i+1} = Y(x_i)$ sólo si se cumple la condición $|Y'(X)| < 1$ siendo $x = X$ la solución. Si la condición no se cumple la iteración no convergerá.

   a) Idear un algoritmo de iteración para resolver la ecuación de Kepler para el caso elíptico: $E - e\sin E - M = 0$. Aplicación: hallar E siendo $e = 0.5$ y $M = 2$ rads.

   b) Idem para el caso hiperbólico: $e\sinh F - F - M = 0$. Aplicación: hallar F siendo $e = 3$ y $M = 1$ rad.

2. Un cometa tiene una distancia perihélica $q = 1$ UA. Hallar la distancia heliocéntrica y la anomalía verdadera que tendría 10 dias después del pasaje por el perihelio para tres diferentes modelos de órbitas con excentricidades $e = 0.9$, $e = 1$ y $e = 1.1$.

3. • Para el caso elíptico hallar el valor medio de la distancia heliocéntrica y del cuadrado de la velocidad, tomando las medias respecto de

   a) la anomalía media

   b) la anomalía excéntrica

   c) la anomalía verdadera.

4. El cometa Encke se mueve en una órbita con distancia perihélica $q = 0.34$ UA y excentricidad $e = 0.847$. Calcular la cantidad promedio de energía que recibe del Sol por unidad de tiempo y de área durante una revolución orbital.

5. • Dos estrellas de masas m y M se encuentran separadas a gran distancia (esto significa distancia infinita). La estrella m tiene una velocidad $\vec{V}$ relativa a M en una dirección que pasa a una distancia mínima σ de M. Probar que después del encuentro, cuando se han vuelto a separar a gran distancia, M ha cambiado su velocidad en

$$\frac{2mVG}{\sqrt{G^2(M+m)^2 + \sigma^2 V^4}}$$

   respecto a un sistema inercial.

6. • Dos estrellas de masas M y m están a gran distancia y se mueven una respecto a la otra con velocidad relativa $\vec{V}$. Sea σ la distancia mínima a la que pasarían si no hubiera atracción gravitacional.

   a) Mostrar que debido a dicha atracción la distancia mínima d entre ambas verifica

$$1/d = G(M+m)\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2 V^4}{G^2(M+m)^2}}}{\sigma^2 V^2}$$

   b) Mostrar que el ángulo ϕ que gira la velocidad relativa luego del encuentro cumple:

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{G(M+m)}{\sigma V^2}$$

7. • Una partícula es lanzada desde gran distancia hacia una estrella de masa M y radio R con velocidad V tal que despreciando la atracción de la estrella se aproximaría hasta una distancia mínima σ de la misma.
   a) Escribir las ecuaciones de la energía y momento angular.
   b) Encontrar σ tal que la partícula pase rasante a la estrella.

8. • VELOCIDAD DE ACRECION DE EDDINGTON

   Una estrella de radio R se mueve a través de una nube de partículas de densidad ρ (partîculas por unidad de volumen) con una velocidad relativa a la nube igual a V. Suponiendo que las partículas no tienen velocidad relativa a la nube, algunas de ellas, las que están dentro de un túnel de radio σ, serán acretadas por la estrella. Mostrar que la velocidad de acreción es:

   $$A = \pi R^2 \rho (V + \frac{2MG}{RV})$$

   expresada en partículas por unidad de tiempo.

9. Cuando un cometa está en el afelio recibe un impulso en la dirección de su movimiento que incrementa su velocidad en un valor δV. Mostrar que la distancia mínima al Sol q será incrementada por la cantidad

   $$\delta q = 4 \delta V \sqrt{\frac{a^3}{\mu} \frac{1-e}{1+e}}$$

10. • Una partícula en órbita heliocéntrica recibe un impulso que hace aumentar su velocidad en un δV. Probar que el cambio resultante en el período δT está dado por

   $$\delta T = 3 \sqrt[3]{\frac{T^5}{(2\pi\mu)^2}} V \delta V$$