MECANICA CELESTE

PRACTICO VI
PROBLEMA DE 3 CUERPOS

1. Considere el criterio de Tisserand para el sistema Sol-Jupiter.

   a) Sea un cometa parabolico con $i = 0°$ y $q = a_J$, suponiendo que no hay cambios en la inclinacion hallar la minima distancia perihelica que puede alcanzar evolucionando en el sistema.

   b) Idem para el caso $i = 180°$.

2. • Exprese la constante de Tisserand, T, en funcion de q y Q para el caso $i = 0$. Estudie aproximadamente la forma de las curvas $T = cte$ en el espacio (q, Q). Determine la curva correspondiente a $T = 3$.

3. • Considere el problema restricto de tres cuerpos plano. Probar que la ecuacion de las curvas limite pueden escribirse como:

$$(1-\mu)\left(r_1^2 + \frac{2}{r_1}\right) + \mu\left(r_2^2 + \frac{2}{r_2}\right) = C + \mu(1-\mu)$$

   Luego pruebe que el minimo valor para C es $3 - \mu(1-\mu)$.

4. Calcular el radio de la esfera de Hill para la Tierra y para Jupiter. Para el sistema Sol-Tierra determine si una particula localizada en el punto doble opuesto al Sol puede ser eclipsada.

5. • Si $(1-\mu)$ y μ son el Sol y la Tierra respectivamente probar que el periodo de las oscilaciones paralelas al eje z de una particula colocada levemente desplazada del punto doble opuesto al Sol es 183.3 dias solares medios.

6. Para el problema anterior probar que el periodo de las oscilaciones en el plano x-y es 177.0 dias.

7. • Considere la integral de Jacobi aplicada aproximadamente al caso del Sol, la Tierra y la Luna (sin masa). Hallar el valor de C e investigar el tamano y forma de las superficies limites de Hill para el movimiento de la Luna. En particular determine si hay conexion entre los lobulos.

8. • Considere las pequeñas oscilaciones en torno a los puntos de libracion de los asteroides Troyanos. Probar que de los dos periodos, uno es aproximadamente igual al de Jupiter y el otro es aproximadamente 148 años. A la oscilacion de mayor periodo se la conoce como *libracion*.

9. Si definimos

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu)$$

   a) Probar que la integral de Jacobi puede ser escrita en la forma

$$v^2 = 2\Phi - C'$$

   b) Probar que C' toma el mismo valor en L_4 y L_5 independientemente de μ, y hallar dicho valor.

   c) Probar que

$$2\Phi = (1-\mu)\left(r_1^2 + \frac{2}{r_1}\right) + \mu\left(r_2^2 + \frac{2}{r_2}\right)$$

10. • Considere el sistema Sol, Neptuno y un transneptuniano como un problema restricto plano de 3 cuerpos. Inicialmente la particula se mueve con velocidad perpendicular al eje $\vec{x}$ del sistema rotante tal que su orbita osculante (movimiento heliocentrico instantaneo) es circular con movimiento medio $n = \frac{2}{3}n_N$, siendo $n_N = 1$ el movimiento medio de Neptuno cuya masa es $\mu = 0.00005$.

    a) Hallar la constante de Jacobi C para la particula.

    b) Determinar si la particula puede ingresar dentro de la esfera de Hill de Neptuno.

11. • Quasi-satelite. El asteroide 2004 GU9 tiene un semieje orbital a igual al de la Tierra, una excentriciad de 0.13 y cuando pasa por el perihelio lo hace exactamente alineado con la Tierra y el Sol. Asumiendo que su orbita es coplanar con la de la Tierra (asumida con excentricidad cero):

    a) probar que en el sistema rotante centrado en la Tierra las coordenadas del asteroide son $x = r\cos(f - M) - a$ e $y = r\sin(f - M)$.

    b) asumiendo $r \simeq a(1 - e\cos M)$ y $f - M \simeq 2e\sin M$ probar que la trayectoria del asteroide respecto a la Tierra es aproximadamente una elipse con centro en la Tierra.

    c) justifique si puede ser o no considerado un satelite de la Tierra.

12. • Realizando varios experimentos con el programa COLISIONLAB estime la vida media del asteroide (99942) Apophis debido a sus encuentros con la Tierra y (6144) Kondojiro debido a sus encuentros con Jupiter.