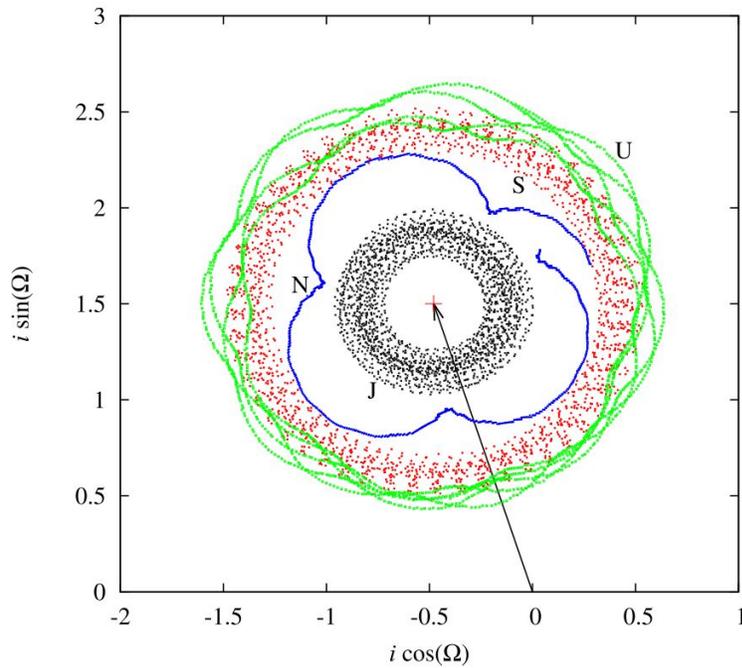


# Notas de Dinámica Orbital Secular y Resonante (versión 22)

*Resumen conceptual del curso Mecánica Celeste.*



Tabaré Gallardo

*Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Udelar, Uruguay*

---

## Abstract

Utilizando un buen integrador numérico podemos explorar la dinámica de cualquier sistema planetario, la cuestión es entender los resultados obtenidos. El objetivo de estas notas es proveer al lector de un mínimo arsenal teórico y práctico para entender la evolución orbital de planetas, satélites y cuerpos menores. Están pensadas para estudiantes a quienes los libros existentes probablemente les resultarán abrumadores. Los métodos analíticos nos permiten entender cualitativamente la dinámica pero en general involucran complejas manipulaciones algebraicas y tienen limitaciones en su aplicación pues existen límites a las excentricidades,

---

*Email address:* [tabare.gallardo@fcien.edu.uy](mailto:tabare.gallardo@fcien.edu.uy) (Tabaré Gallardo)

inclinaciones o semiejes orbitales involucrados. Por este motivo prestaremos atención también a desarrollar métodos semianalíticos que utilizan la misma base teórica pero las perturbaciones son calculadas numéricamente, sin limitaciones en su validez. Son notas que acompañan el curso de Mecánica Celeste, no hay aquí mucho esmero en las demostraciones y debe haber varios errores pero luego de leerlas entenderemos las principales ideas como para luego pasar a libros mas formales como Morbidelli (2002a), que junto a Murray and Dermott (1999) y Tremaine (2023) pueden ser los libros de cabecera para esta temática. No son exhaustivas, hay varios temas ausentes por ahora.

---

## Contents

<b>1</b>	<b>Ecuaciones planetarias</b>	<b>5</b>
1.1	Evolución orbital . . . . .	5
1.2	Formulación de Gauss . . . . .	6
1.2.1	Aplicación: efectos relativistas . . . . .	8
1.3	Ecuaciones planetarias de Lagrange . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Función perturbadora</b>	<b>11</b>
2.1	Desarrollo analítico . . . . .	11
2.2	$R$ por no esfericidad del cuerpo central . . . . .	12
2.3	$R$ para estrella + 2 planetas . . . . .	12
2.4	$R$ para asteroide perturbado por un planeta . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Formulación Hamiltoniana</b>	<b>14</b>
3.1	Hamiltoniano de dos cuerpos . . . . .	14
3.2	Hamiltoniano y variables canónicas . . . . .	15
3.3	Movimiento relativo de dos cuerpos . . . . .	16
3.4	Espacio de fase extendido . . . . .	16
3.5	Asteroide perturbado por planeta . . . . .	17
3.6	Asteroide perturbado por $N$ planetas circulares y coplanares . . . . .	18
3.7	Hamiltoniano del problema de $N$ cuerpos . . . . .	18
3.7.1	Estrella mas dos planetas . . . . .	19
3.7.2	Estrella y tres planetas . . . . .	20
3.8	Elementos astrocéntricos, baricentricos, Poincare, Jacobi... . . . .	20
3.8.1	Elementos osculantes y medios . . . . .	21
3.9	Sistemas Hamiltonianos y Caos . . . . .	21
3.9.1	Integrabilidad . . . . .	21
3.9.2	Liouville y Lyapunov . . . . .	24
3.9.3	KAM y Poincare-Birkhoff . . . . .	25
3.10	Flujo Hamiltoniano e integradores simpleticos . . . . .	26
3.11	Ejemplo ineludible: el pendulo . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Teoría secular analítica</b>	<b>31</b>
4.1	Eliminación de variables rápidas . . . . .	31
4.2	Teoría de perturbaciones . . . . .	31
4.3	Evolución secular por achatamiento . . . . .	32

4.4	Perturbación secular de planeta sobre asteroide . . . . .	32
4.5	Ecuaciones seculares para el conjunto $a, e, i, \Omega, \omega$ . . . . .	34
4.6	Teorías para bajas $(e, i)$ . . . . .	35
4.6.1	Perturbador externo con $i_p = 0$ . . . . .	35
4.6.2	Perturbador interno con $i_p = 0$ . . . . .	35
4.6.3	Caso secular asteroidal plano . . . . .	36
4.6.4	Caso secular transNeptuniano plano . . . . .	37
4.6.5	Teoría secular para 2 planetas de bajas $(e, i)$ . . . . .	37
4.6.6	Teoría secular asteroide perturbado por sistema planetario: elementos propios . . . . .	38
4.6.7	Teoría secular de sistema planetario de bajas $(e, i)$ . . . . .	39
4.7	Resonancias seculares y elementos propios . . . . .	39
4.8	Revisión de $R_{sec}$ y aproximación secular de cuadrupolo y octupolo . . . . .	40
4.9	Partícula de arbitrarias $(e, i)$ con perturbadores circulares coplanares: vZLK . . . . .	41
4.9.1	ZLK interno . . . . .	42
4.9.2	ZLK externo . . . . .	44
4.9.3	ZLK excéntrico . . . . .	45
4.10	Teoría secular general para partícula perturbada por un planeta excéntrico . . . . .	45
4.11	Teoría secular general para 2 planetas . . . . .	46
4.11.1	Caso plano . . . . .	46
4.11.2	Caso tridimensional . . . . .	47
4.12	Plano invariable y AMD . . . . .	49
4.13	Dinámica de satélites . . . . .	53
4.13.1	Radio crítico y plano de Laplace . . . . .	53
4.13.2	Resonancia de eveccion . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Teoría secular semianalítica</b> . . . . .	<b>56</b>
5.1	Algoritmo de calculo numérico de $R_{sec}$ y sus derivadas . . . . .	56
5.2	Aplicación: la receta de sumar las masas al Sol . . . . .	60
5.3	Evolución de partícula con perturbadores en órbitas fijas . . . . .	62
5.3.1	Evolución secular de asteroide coplanar con un planeta excéntrico . . . . .	62
5.3.2	Evolución secular espacial de asteroide . . . . .	62
5.3.3	Determinación de elementos propios y forzados . . . . .	63
5.3.4	Resonancias seculares: localización numérica . . . . .	64
5.3.5	Perturbadores circulares y coplanares: ZLK numérico . . . . .	66
5.4	Evolución secular de sistema planetario y partículas . . . . .	68
5.5	Dinámica secular de 2 planetas . . . . .	69
5.6	Validez de la teoría secular . . . . .	69
5.7	Teorías sintéticas . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Resonancias de movimientos medios</b> . . . . .	<b>73</b>
6.1	Origen del movimiento resonante . . . . .	73
6.2	Términos resonantes para bajas $(e, i)$ . . . . .	76
6.3	Aproximación analítica: caso plano y bajas $e$ . . . . .	77
6.4	Aproximación semianalítica espacial . . . . .	80
6.4.1	Calculo numérico de $\mathcal{R}$ . . . . .	81
6.4.2	Hamiltoniano y ecuaciones de movimiento . . . . .	82

6.4.3	Puntos de equilibrio . . . . .	83
6.4.4	Ancho de resonancia . . . . .	84
6.4.5	Anchos estables . . . . .	87
6.5	Evolución secular del movimiento resonante . . . . .	89
6.6	Anillos . . . . .	89
6.7	Resonancia de corrotacion, secundarias y splitting . . . . .	90
6.8	Resonancias planetarias . . . . .	90
6.9	Resonancias y migración planetaria . . . . .	91
6.10	Resonancias de tres cuerpos . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Apéndice</b>	<b>101</b>
7.1	Efecto de $(e, i)$ planetarias . . . . .	101

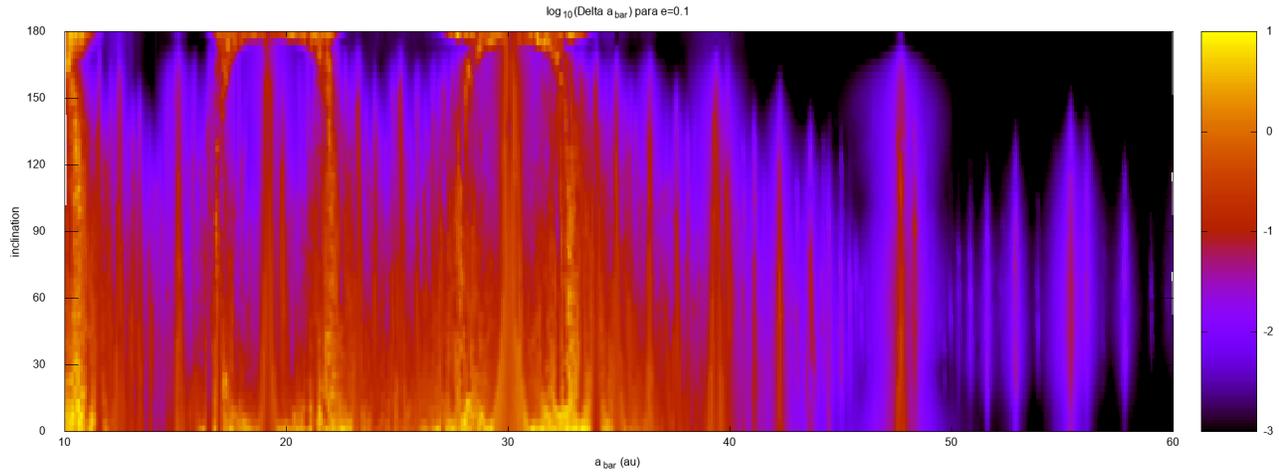


Figure 1: Mapa dinámico mostrando cambios orbitales en partículas integradas todas con  $e = 0.1$  en una grilla  $(a, i)$  durante 100 revoluciones orbitales en el Sistema Solar.

## 1 Ecuaciones planetarias

### 1.1 Evolución orbital

La figura 1 muestra las variaciones orbitales experimentadas por partículas (sin masa, es decir no perturban a los demás cuerpos) de prueba evolucionando en el sistema solar. Todas fueron tomadas con valor inicial  $e = 0.1$  y sobre una grilla variando  $10 < a < 60$  ua y  $0 < i < 180$ . Grandes variaciones orbitales en amarillo y bajas en negro. ¿Por qué en algunas regiones se ven grandes variaciones y en otras no? La idea de estas notas es entender esto y encontrar la lógica a los cambios orbitales.

Podemos distinguir al menos 4 diferentes evoluciones orbitales:

1. **secular**, es la que por ejemplo muestra el sistema planetario en escalas de algunos millones de años. Los  $a$  se mantienen constantes y  $(e, i)$  presentan oscilaciones con frecuencias bien definidas.
2. **caótica**, es la que muestra el mismo sistema pero en escalas de miles de millones de años. Los elementos  $(a, e, i)$  presentan evoluciones muy lentas irregulares, fenómeno conocido como **difusión caótica**.
3. **aleatoria** o altamente caótica, es la evolución típica de un cometa que se encuentra con Júpiter, luego de unas pocas revoluciones ya es imposible predecir su futuro. Los elementos orbitales muestran saltos abruptos generados en cada encuentro.
4. **resonante**, como la de algunos asteroides. Existe una commensurabilidad entre alguna frecuencia propia del movimiento del asteroide y alguna frecuencia fundamental del sistema planetario que genera un modo forzado que hace oscilar  $(a, e, i)$  con una frecuencia y amplitud definidas por la **fuerza** de la resonancia.

Todos los sistemas planetarios son caóticos por la simple razón de que todos los sistemas gravitacionales con mas de 2 cuerpos son caóticos, no existe una solución analítica para el caso general. Algunos sistemas pueden mostrarse **regulares** (lo contrario de caóticos) en escalas cortas de tiempo (cortas puede significar millones de años) pero en escalas suficientemente grandes mostrarse caóticos. El caos a veces no se manifiesta en grandes cambios orbitales

(**caos estable**). El Sistema Solar es un ejemplo típico, en escalas de tiempo de cientos de millones de años su comportamiento es secular, predecible, y en escala de miles de millones comienza a ser impredecible. Nos vamos a ocupar especialmente de las evoluciones seculares y resonantes pues son aquellas que podemos predecir. Las caóticas no son predecibles excepto en términos estadísticos por lo que es necesario recurrir a simulaciones. Para entender estos temas partiendo de la ignorancia un posible camino sería

1. consultar el resumen del curso de Dinámica Orbital Gallardo (2020a)
2. entender como se estudia en forma puramente numérica un sistema planetario en Gallardo (2017)
3. leer estas notas junto a Murray and Dermott (1999) y Tremaine (2023)
4. ver enriquecedoras discusiones en Moulton (1914); Brown and Shook (1933); Brouwer and Clemence (1961); Hagihara (1972)
5. leer Morbidelli (2002a)

Prácticamente no existe material en español por lo que los libros de Portilla (2001); Gonzalez Martinez-Pais (2003); Lopez Garcia (2018) y el curso de Gil-Hutton (2020) son de gran utilidad.

## 1.2 *Formulación de Gauss*

Si consideramos que un cuerpo en una órbita Kepleriana es perturbado por una aceleración de componentes  $(R, T, N)$  es posible obtener las expresiones para las tasas de las variaciones de los elementos orbitales. Teniendo presente los errores tipográficos ver Murray and Dermott (1999, cap. 2) o también Burns (1976). Por ejemplo, la variación  $da/dt$  esta dada por

$$da/dt = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} \left[ eR \sin f + T(1 + e \cos f) \right] \quad (1)$$

donde  $\mu = k^2 M_\odot$ . Tener en cuenta que en las deducciones cuando aparecen  $\dot{r}$  o  $\dot{f}$  se refieren a las variaciones debido al movimiento Kepleriano exclusivamente, no debido a las variaciones (perturbaciones) en los elementos orbitales. Si la perturbación es generada por un planeta podemos calcular  $(R, T, N)$  a partir de la ecuación (6) y proyectándola en las direcciones  $\hat{r}, \hat{h}, \hat{t} = \hat{h} \wedge \hat{r}$  y podemos evaluar su efecto en la evolución del semieje. Tenemos un código en fortran (qué? algún problema?) que calcula esto (RTN.f) y en la figura 2 graficamos la máxima variación relativa  $|da/dt|/a$  calculada con ec. (1) para una partícula test perturbada por Júpiter. La curva es bien interesante con un gran pico en las proximidades de Júpiter y un quiebre curioso en  $a \sim 8.0$  ua que probablemente sea debido al momento en que las perturbaciones indirectas comienzan a predominar sobre las directas. Estas variaciones son de periodo muy corto ( $\sim$  periodo orbital de Júpiter) y como veremos no generan variaciones en el semieje a largo plazo (aunque si en mediano plazo en caso de resonancias de movimientos medios) pero si son muy grandes, aun siendo de corto periodo, pueden perturbar drásticamente los elementos orbitales y destruir la evolución secular.

Esas ecuaciones muestran que esas tasas pueden variar bastante dependiendo de la posición orbital del objeto (dada por  $f$ ) por lo cual suelen ser promediadas en un periodo orbital para considerar el efecto neto, secular, de largo plazo. Se integra en el tiempo por un periodo orbital y se divide por el periodo orbital, o lo que es lo mismo se integra en anomalía media entre  $(0, 2\pi)$  y se divide entre  $2\pi$ . La integral en el tiempo se puede transformar a integral en anomalía verdadera  $f$  haciendo un cambio de variable  $dt = \frac{r^2}{h} df$ , y esto lo hacemos pues en las ecuaciones de Gauss aparece la  $f$  en forma explicita y no el tiempo:

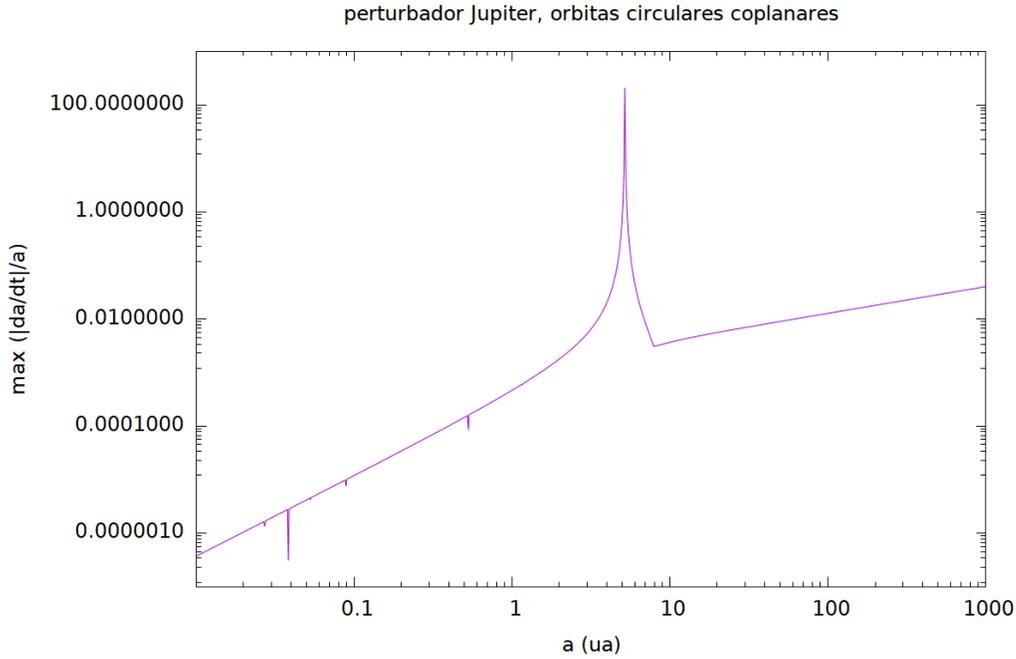


Figure 2: Máximo valor de  $|da/dt|/a$  en unidades de 1/dia en funci3n de semieje  $a$  debido a las perturbaciones de corto periodo de Júpiter sobre una partícula calculado con la ecuaci3n 1. Ambos en 3rbitas circulares y coplanares.

$$\begin{aligned}
\langle \dot{a} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mu a}(1-e^2)\pi} \int_0^{2\pi} \left[ eR \sin f + T(1+e \cos f) \right] r^2 df \\
\langle \dot{e} \rangle &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu a^3}} \int_0^{2\pi} \left[ R \sin f + T \left( \cos f + \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \right) \right] r^2 df \\
\langle \dot{i} \rangle &= \frac{1}{2\pi(1-e^2)\sqrt{\mu a^5}} \int_0^{2\pi} N \cos(f+\omega) r^3 df \\
\langle \dot{\Omega} \rangle &= \frac{1}{2\pi(1-e^2)\sqrt{\mu a^5} \sin i} \int_0^{2\pi} N \sin(f+\omega) r^3 df \\
\langle \dot{\omega} \rangle &= \frac{1}{2\pi e\sqrt{\mu a^3}} \int_0^{2\pi} \left[ -R \cos f + T \sin f \left( \frac{2+e \cos f}{1+e \cos f} \right) \right] r^2 df - \cos i \langle \dot{\Omega} \rangle \\
\langle \dot{M}_r \rangle &= \frac{-1}{\pi\sqrt{\mu a^5}(1-e^2)} \int_0^{2\pi} Rr^3 df - \sqrt{1-e^2} (\langle \dot{\omega} \rangle + \langle \dot{\Omega} \rangle \cos i) \quad (2)
\end{aligned}$$

donde  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}$ . En la última ecuaci3n la variaci3n en la anomalía media es debida a la perturbaci3n, no al movimiento Kepleriano, es decir es la variaci3n de  $M$  en cierta 3poca de referencia ( $M_r$ ). Todo se puede poner en funci3n de  $f$  y conociendo las expresiones para ( $R, T, N$ ) es posible calcular las integrales analítica o numéricamente. Estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de Gauss promediadas (**time averaged Gauss planetary equations**). Y véase que en las ecuaciones medias ya no hay variables de evoluci3n rápida dependiendo del tiempo o de  $f$ . Estas ecuaciones nos muestran como evolucionan no los elementos osculadores sino los **elementos medios**. Los osculantes (instantáneos) presentaran pequeñas oscilaciones en torno a los medios, y son estos últimos los que importan en grandes escalas de tiempo.

Un resultado muy conocido que se deduce de esta formulación es que si no hay componente normal al plano,  $N = 0$ , la inclinación y el nodo permanecen constantes, o sea el plano orbital queda fijo. Las perturbaciones que solo actúan en la dirección del plano no pueden cambiarlo. Otro resultado importante tiene que ver con el efecto de  $T$  en el semieje: mientras la componente  $R$  esta factorizada por  $\sin(f)$  que cambia de signo, la componente  $T$  tiene un factor 1 lo cual puede generar efectos sistemáticos en el semieje, de ahí que la componente transversa sea crucial para la evolución del semieje. Hay unas cuantas aplicaciones de este método para obtener la evolución secular de un cuerpo. Existe una forma alternativa considerando las componentes  $(V, S, N)$  según la dirección de la velocidad, perpendicular a la velocidad (no radial) y normal que se encuentra en Danby (1992, cap. 11.7).

### 1.2.1 Aplicación: efectos relativistas

Una aplicación de las ecuaciones de Gauss es el calculo de los efectos relativistas del Sol o cuerpo central. El desarrollo de encuentra resumido por ejemplo en Gallardo and Venturini (2010). La perturbación relativista simplificada del Sol en forma vectorial  $\Delta\ddot{\mathbf{r}}$  es

$$\Delta\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3 c^2} \left[ \left( \frac{4\mu}{r} - \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{r} + 4(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v} \right] \quad (3)$$

donde  $\mu = k^2 M_\odot$ . Operando se puede ver que esa expresion puede descomponerse en una componente radial y una transversa:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\mu^2}{r^3 c^2} \left[ 2 + \frac{r}{a} \left( 1 + \frac{4e^2}{1-e^2} \sin^2 f \right) \right] \\ T &= \frac{4\mu^2 e \sin f}{c^2 r^3} \end{aligned} \quad (4)$$

que al ser introducidas en las ecuaciones de Gauss y promediando en el tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \dot{a} \rangle &= \langle \dot{e} \rangle = \langle \dot{i} \rangle = \langle \dot{\Omega} \rangle = 0 \\ \langle \dot{\omega} \rangle &= \frac{3}{c^2 (1-e^2)} \sqrt{\frac{\mu^3}{a^5}} \end{aligned} \quad (5)$$

que es justamente el efecto relativista en los perihelios de los planetas. Se han propuesto diversos modelos que generan el mismo efecto medio y que no dependen de operar con vectores como en la formula 3.

**Ejercicio.** Los efectos relativistas del Sol en primera aproximación se pueden reproducir asumiendo una aceleración dada por (Gallardo and Venturini, 2010):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_\odot}{r^2} \left( 1 + \frac{6GM_\odot}{c^2 r} \right) \hat{\mathbf{r}}$$

Usando las ecuaciones de Gauss calcular las variaciones medias de los elementos orbitales generados por este modelo de perturbación relativista.

**Ejercicio.** Una partícula en órbita de excentricidad  $e \sim 0$  sufre una perturbación radial  $R$  constante. Probar que todos los efectos medios en los elementos orbitales son nulos excepto en  $\langle \dot{M}_r \rangle$ . Probar que la velocidad angular observada sera  $n' = n - 2R\sqrt{a/\mu}$ . Notar que si  $R$  es hacia el centro el movimiento es mas rápido y si es hacia afuera el movimiento es mas lento que el Kepleriano.

**Ejercicio.** Las fuerzas de rozamiento por lo general son perturbaciones del tipo  $b\hat{V}$  siendo  $b$  una expresión que suele ser función de la velocidad, es decir que actúan en la dirección del versor velocidad. Probar que una perturbación de este tipo puede escribirse como la suma de una radial  $R = b\dot{r}/V$  y una transversa  $T = b\dot{\theta}/V$ .

### 1.3 Ecuaciones planetarias de Lagrange

El movimiento de un cuerpo de masa  $m$  en torno de una estrella central de masa  $M_\star$  perturbado en coordenadas rectangulares astrocéntricas suele escribirse como una parte Kepleriana con solución analítica mas una suma de aceleraciones perturbadoras:

$$\ddot{\mathbf{r}} + k^2(M_\star + m)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_j \nabla R_j \quad (6)$$

donde las  $R_j$  son las **funciones perturbadoras** debidas a diferentes causas y son funciones fuerza, o sea que su gradiente da la aceleración perturbadora. Los potenciales,  $V$ , tienen signo contrario pues la aceleración es menos gradiente del potencial ( $-\nabla V$ ). En el caso de que los perturbadores sean otros planetas entonces tenemos

$$\nabla R_j = k^2 m_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (7)$$

pero las  $R_j$  pueden tener también otros orígenes.

Cada coordenada puede escribirse en función del tiempo y de los elementos orbitales y el  $\nabla R_j$  se puede escribir en función de las derivadas parciales respecto a los elementos orbitales. Luego de unas cuantas operaciones la ecuación (6) puede escribirse enteramente en función de los elementos orbitales constituyendo el sistema de ecuaciones planetarias de Lagrange, que depende del juego de elementos orbitales utilizado. Si tomamos el set  $(a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda)$  tenemos

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (8)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left( 1 - \sqrt{1-e^2} \right) \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \quad (9)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (10)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (11)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (12)$$

La deducción detallada de estas ecuaciones puede verse por ejemplo en Brouwer and Clemence (1961, cap XI) o Roy (2005, cap 7.7) o Portilla (2001, cap 14.5) o Mikkola (2020, cap. 4), etc.

La ecuación para  $d\lambda/dt$  merece un tratamiento especial pues esa variable ( $\lambda = \varpi + M$ ) ya tiene una variación lineal con el tiempo ( $M = M_r + nt$ ) a lo que se agrega su variación mucho mas pequeña debido a la perturbación que en consecuencia queda perdida frente a la otra. Esto genera que la ecuación  $d\lambda/dt$  tenga  $t$  explicito y por lo tanto al integrar habrá un factor  $t^2$  generando grandes cambios en  $\lambda$  al crecer el tiempo lo cual complica para obtener la solución en forma precisa. Ver detalles en Murray and Dermott (1999). Usando el set  $(a, e, i, \Omega, \omega, \lambda)$  el sistema de ecuaciones queda algo diferente.

La expresión para la perturbación en anomalía media esta dada como la variación de su valor en cierta época de referencia  $M_r$  y su expresión es

$$\frac{dM_r}{dt} = -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \quad (13)$$

El significado de esta ultima ecuación es que el movimiento medio efectivo de la partícula no sera igual al osculante (que siempre esta dado por la definición  $n = \sqrt{\mu/a^3}$ ) sino que como  $M = M_r + nt$  tenemos que la variación de la anomalía media resulta  $dM/dt = n + dM_r/dt$ , o sea que hay una corrección. Si nos interesa el tiempo que le lleva completar una revolución respecto a un referencial fijo (periodo observado) entonces eso está definido por la evolución de  $\lambda = M + \varpi$  y por lo tanto también entra en juego la evolución de  $\varpi$ . Mas adelante en la sección 5 mostraremos el comportamiento de estas variaciones en los elementos orbitales de una partícula perturbada por Júpiter en función de  $a$ .

Entonces, en vez de preocuparnos por la evolución de las coordenadas rectangulares que son de variación muy rápida, las ecuaciones planetarias de Gauss o Lagrange nos brindan la evolución de los elementos orbitales directamente. En el siguiente capitulo pasaremos a obtener expresiones para  $R$  en función de los elementos orbitales de forma de poder calcular las derivadas parciales.

#### Clases en video:

- Clase 01: <https://youtu.be/dezxaCAvMxY>
- Clase 02: <https://youtu.be/k2yRu3j8K98>
- Clase 03: <https://youtu.be/urj7FMzv3Uw>

## 2 Función perturbadora

### 2.1 Desarrollo analítico

¿Cómo es la forma analítica de las funciones perturbadoras  $R$ ? De un libro básico de mecánica celeste como Roy (2005) la expresión en coordenadas rectangulares para la  $R$  generada por un planeta de masa  $m_p$  orbitando al Sol sobre un punto dado por el vector  $\mathbf{r}$  es:

$$R = k^2 m_p \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_p}{r_p^3} \right) \quad (14)$$

donde el primer termino es el directo y el otro el indirecto. Esta es la expresión utilizada para las perturbaciones entre órbitas heliocéntricas. Si se trata de un satélite en torno a un planeta la función perturbadora del Sol sobre el satélite esta dada por

$$R = k^2 M_\odot \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\odot}{r_\odot^3} \right) \quad (15)$$

donde los  $\mathbf{r}$  refieren a las posiciones planetocentricas. Esta perturbación esta generada por la diferencia de aceleración Solar sobre el planeta y sobre el satélite (marea). Como se puede ver la función perturbadora es análoga simplemente cambiamos el origen que ahora es planetocentrico.

Si nos interesa resolver analíticamente las ecuaciones planetarias tenemos que expresar  $R$  en función explicita de los elementos orbitales y esto se logra sustituyendo las coordenadas rectangulares por desarrollos en serie de  $(a, e, i)$  y de los ángulos involucrados lo cual transforma  $R$  en una expresión muy complicada difícil de manejar si no es mediante manipuladores algebraicos, o truncandola en unos pocos términos. En Murray and Dermott (1999, cap 6) se muestra una forma clásica de obtener  $R$  analíticamente como desarrollos en series. Ver también el desarrollo del tema en Tremaine (2023, cap 4). Existen varias formas de hacer los desarrollos, algunos son hechos en  $a/a_p$  o  $a_p/a$  pequeños es decir para órbitas bien separadas pero permiten estudiar altas  $(e, i)$ . Otros son desarrollos en  $(e, i)$  por lo que son validos para pequeñas  $(e, i)$ . Los términos que contienen ángulos suelen desarrollarse en series de Fourier. En el libro de Brown and Shook (1933) se discute en profundidad los tipos de desarrollos y en Beaugé (1996) se hace una síntesis de varios métodos. Todo comienza por procurar por ejemplo un desarrollo del tipo

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r_p} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r_p} \right)^l P_l(\cos \psi) \quad (16)$$

donde  $r_p > r$  para el caso perturbador externo, los  $P_l$  son los polinomios de Legendre y  $\psi$  es el angulo entre los vectores  $\mathbf{r}_p$  y  $\mathbf{r}$ .

Hasta los años 60 del siglo XX la manipulación de los desarrollos de  $R$  era básicamente a mano y a partir de entonces comienzan a surgir algunos manipuladores algebraicos para Mecánica Celeste. Murray and Dermott (1999) explica en detalle el desarrollo de Ellis and Murray (2000) y ofrece la fabulosa rutina `DisturbingFunction.nb` que permite manipulaciones con `Mathematica`. Mas recientemente Hadden and Tamayo (2022) ofrecen el paquete `celmech` que permite manipular algebraicamente la misma  $R$  pero en ambiente Python. `TRIP` (Gastineau and Laskar, 2011) es un manipulador algebraico que incluye desarrollos de la función perturbadora realizado en forma independiente desde el IMCCE.

## 2.2 $R$ por no esfericidad del cuerpo central

Los principales términos de la función perturbadora generada por el achatamiento de un planeta con simetría de revolución y simetría norte - sur son

$$R = -\frac{k^2 m_p}{r} \left( J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 P_2(\sin \phi) + J_4 \left( \frac{R_p}{r} \right)^4 P_4(\sin \phi) \right) \quad (17)$$

donde  $R_p$  es el radio del planeta, los  $J_i$  son los momentos gravitacionales (que dependen del valor adoptado para  $R_p$ ), los  $P_i$  son los polinomios de Legendre donde  $P_2(x) = (1/2)(3x^2 - 1)$  y  $\phi$  es la latitud planetocéntrica del punto del espacio en que evaluó la función perturbadora y  $r$  la distancia planetocéntrica (Murray and Dermott, 1999, pag 269). Esta  $R$  y la ec. (15) se utilizan para el movimiento de un satélite en torno a un planeta. Si el satélite está muy próximo a la superficie planetaria habrá que usar un desarrollo de alto orden para el potencial del planeta.

El problema de planeta y satélite no esféricos interactuando puede verse en Scheeres (2002).

## 2.3 $R$ para estrella + 2 planetas

La obtención del desarrollo de  $R$  como series en función de los elementos orbitales está en el capítulo 6 de Murray and Dermott (1999). Existe una versión condensada en español en el curso de Gil-Hutton (2020). A cada planeta le corresponde una  $R$  diferente pues uno es interior y el otro exterior pero la forma general es similar. De acuerdo al desarrollo analítico  $R$  tiene la forma:

$$R(a_1, a_2, e_1, e_2, i_1, i_2, \lambda_1, \lambda_2, \varpi_1, \varpi_2, \Omega_1, \Omega_2) = \sum_i C_i \cos(\varphi_i) \quad (18)$$

$$\varphi_i = j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + j_3 \varpi_1 + j_4 \varpi_2 + j_5 \Omega_1 + j_6 \Omega_2 \quad (19)$$

y se cumple

$$\sum j_i = 0 \quad (20)$$

$$|j_5 + j_6| \text{ es par} \quad (21)$$

$$C_i = f(a_1, a_2) e_1^{|j_3|} e_2^{|j_4|} s_1^{|j_5|} s_2^{|j_6|} + \text{términos de orden superior} \quad (22)$$

donde  $s = \sin(i/2)$ . Las funciones  $f(a_1, a_2)$  son bastante complicadas, dependen de los **coeficientes de Laplace**  $b_s^{(j)}$  y sus derivadas y podemos obtenerlas con manipuladores algebraicos junto con las expresiones  $C_i$ . Pero los coeficientes de Laplace y sus derivadas se pueden expresar como series en  $\alpha = a_1/a_2$  y para  $\alpha \ll 1$  resultan bastante sencillas (ver sección 4.6). A la sumatoria  $|j_3| + |j_4| + |j_5| + |j_6|$  se le llama **orden** y define el menor orden de los  $C_i$  por lo que interesa conservar los términos de menor orden. Este es un desarrollo en torno de  $i = 0, e = 0$ , quiere decir que funciona muy bien en bajas  $(e, i)$  y si tenemos que estudiar casos de moderadas  $(e, i)$  necesitaremos muchos términos en el desarrollo. Para altas  $(e, i)$  estas series no convergen (siempre debe verificarse  $e < 0.66\dots$  y a veces mucho menos que eso) por lo cual no es posible utilizarlo. Para resolver el problema es necesario plantear la  $R$  para cada planeta, las ecuaciones planetarias de Lagrange para cada planeta y resolverlas simultáneamente. O sea que hay 2 juegos de ecuaciones pues los planetas se perturban mutuamente. Las combinaciones de los  $\varphi_i$  definen los términos

1. **seculares**, no dependen de las  $\lambda_i$ , que son de variación rápida
2. **resonantes**, combinaciones de los  $\lambda_i$  que generan ángulos de variación lenta

### 3. **de corto periodo**, todos los demás términos que contienen las $\lambda_i$

Los términos seculares son los mas simples y los que definen la evolución del sistema en el largo plazo. Como veremos, para obtenerlos en forma aproximada basta ignorar todos los que dependan de las  $\lambda_i$ , o también promediando  $R$  en las  $\lambda_i$  obteniendo la  $R_{sec}$ . La relación (20) es la **propiedad de D'Alembert** que se origina en la necesaria invariancia de los  $\varphi_i$  ante un cambio de origen para los ángulos: si el punto aries se desplaza los  $\varphi_i$  no pueden cambiar pues la física es la misma. La condición (21) no es tan obvia y viene de considerar invariancias ante cambio de definición de nodo de referencia (ascendente o descendente), definición de periastro o apoastro para medir la orientación del eje de la cónica e invariancia por la definición de la dirección del eje z, todo lo cual esta explicado en Hamilton (1994). Esta propiedad es muy importante pues nos dice que los términos de menor orden en inclinación son de orden 2 mientras que en excentricidad son de orden 1 y esto implica que en régimen de órbitas de baja  $(e, i)$  la dinámica es mas afectada por las excentricidades que por las inclinaciones. Para altas  $(e, i)$  los desarrollos cada vez representan menos fielmente la función perturbadora por lo cual estas conclusiones no se pueden extender a todos los regímenes.

Usando las reglas de la función perturbadora es muy fácil saber cuales son los principales argumentos  $\varphi_i$  de  $R$  en un problema, lo complicado es definir las funciones  $f$ . Por ejemplo, en el caso de dos planetas coplanares el principal termino secular involucra a  $\varphi = \varpi_1 - \varpi_2$ , pero ¿por qué no es importante  $\varphi = 2\varpi_1 - 2\varpi_2$ ? ¿por qué no hay un término sólo con  $\varpi_1$  o  $\varpi_2$ ?

#### 2.4 $R$ para asteroide perturbado por un planeta

Desarrollo analítico de  $R$  es como en el caso anterior:

$$R(a, e, i, \lambda, \lambda_p, \varpi, \Omega) = \sum C_i \cos(\varphi_i) \quad (23)$$

$$\varphi_i = j_1\lambda + j_2\lambda_p + j_3\varpi + j_4\varpi_p + j_5\Omega + j_6\Omega_p \quad (24)$$

$$C_i = f(a, a_p) e^{|j_3|} e_p^{|j_4|} s_p^{|j_5|} s_p^{|j_6|} + \text{términos de orden superior} \quad (25)$$

todo análogo al caso anterior pero ahora la órbita del planeta es fija pues no es perturbado y solo hay un juego de ecuaciones para el asteroide. Como veremos en la sección 4.6 la  $R$  es diferente si se trata de un planeta exterior o interior a la órbita del asteroide. Los elementos orbitales del planeta son constantes, lo único que varia con el tiempo es  $\lambda_p$ . Si el planeta tiene  $e_p = s_p = 0$  entonces  $j_4 = j_6 = 0$  y  $j_5$  es par.

Antes de pasar a resolver las ecuaciones planetarias, en el siguiente capitulo veremos algunos fundamentos teóricos.

#### Clases en video:

- Clase 04: [https://youtu.be/iD\\_6JqubmUc](https://youtu.be/iD_6JqubmUc)
- Clase 05: <https://youtu.be/zM10H7VJmjc>
- Clase 06: <https://youtu.be/GMo0iL7GMpI>

### 3 Formulación Hamiltoniana

A diferencia de la formulación Newtoniana de la mecánica, la Hamiltoniana no utiliza vectores ni derivadas segundas y utiliza un set de variables **canónicas** (siguen un canon) que reducen las ecuaciones a una forma compacta (canónica). Las ecuaciones planetarias de Lagrange no incluyen derivadas segundas pero no es Hamiltoniana pues la forma no es compacta. Un libro muy ameno que compara las formulaciones Newtoniana, Lagrangiana y Hamiltoniana es Schwichtenberg (2019). Como se comenta en Ferraz-Mello (2007) o en Gutzwiller (1998), los astrónomos del siglo XIX notaron que dada una cierta  $R$  las ecuaciones planetarias de Lagrange quedan en un formato muy simple cuando se expresan en función de las variables de Delaunay ( $L, G, H, l = M, g = \omega, h = \Omega$ ). Por ejemplo, la ecuación que describe la evolución de  $G$  es:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (26)$$

y las demás son análogas. Si bien la formulación Hamiltoniana ya se había propuesto, Delaunay obtuvo las ecuaciones planetarias en esta nueva forma de modo totalmente independiente. En, por ejemplo, Valtonen and Karttunen (2006, cap. 4) o en Mikkola (2020, cap. 3) se explica cómo se llega a la formulación Hamiltoniana. Primero se definen las coordenadas generalizadas,  $q_i$ , se introduce el Lagrangeano como la diferencia entre energía cinética y potencial ( $L = T - V$ ) y se introduce el principio de Hamilton que dice que la naturaleza evoluciona de forma que la integral del Lagrangeano es un extremo. Así se obtienen las ecuaciones de Lagrange que son ecuaciones diferenciales de segundo orden y equivalentes a las de Newton. Si bien en física la formulación Lagrangiana es muy útil al considerar cuerpos en contacto, en mecánica celeste es bastante inútil pues no hay nada apoyado, no hay vínculos. Sin embargo la formulación Lagrangeana nos permite llegar a la Hamiltoniana. Se introduce el concepto de coordenada y momento generalizado como una variable independiente de las coordenadas. Se duplica entonces el número de incógnitas. Se sustituye el Lagrangeano por una entidad que contenga las coordenadas y momentos ( $q_i, p_i$ ) mediante la transformación de Legendre y se obtiene la expresión formal para el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - L \quad (27)$$

y a partir de aquí se obtienen las ecuaciones canónicas que son el doble de las que teníamos inicialmente pero son de primer orden. El **espacio de configuración**  $N$ -dimensional es el definido por las coordenadas  $q_i$  y el **espacio de fase** es el definido por las  $2N$  variables ( $q_i, p_i$ ). Eso fue un curso de mecánica analítica en un párrafo... También se prueba que en un sistema donde las fuerzas derivan de un potencial el Hamiltoniano es la energía total del sistema ( $\mathcal{H} = T + V$ ).  $N$  es el número de **grados de libertad** del sistema, ejemplo si son 4 cuerpos en el espacio tenemos  $N = 4 \times 3$ .

#### 3.1 Hamiltoniano de dos cuerpos

La forma infalible de obtener un Hamiltoniano y las ecuaciones canónicas es escribir la energía total en un sistema baricéntrico y con las coordenadas baricéntricas  $\vec{r}$  y sus momentos conjugados  $\vec{p} = m\vec{v}$ . En el problema de dos cuerpos esto sería:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 - k^2 \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (28)$$

donde los primeros términos corresponden a las energías cinéticas y el ultimo a la potencial mutua. Las ecuaciones canónicas para cada cuerpo quedan

$$\dot{\vec{p}}_i = -(\partial\mathcal{H}/\partial x, \partial\mathcal{H}/\partial y, \partial\mathcal{H}/\partial z) \quad (29)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = (\partial\mathcal{H}/\partial p_x, \partial\mathcal{H}/\partial p_y, \partial\mathcal{H}/\partial p_z) = (v_x, v_y, v_z) = \vec{v}_i \quad (30)$$

con  $i = 1, 2$ . La ultima es trivial y las ecs. (29) son las ecuaciones de Newton para cada masa que describe su movimiento en torno al baricentro. O sea que el conjunto  $(\vec{r}, \vec{p})$  es canónico sin embargo no son variables convenientes para estudiar la evolución de un sistema en el largo plazo pues varían muy rápidamente. Es mas conveniente pasar a variables canónicas mas parecidas a elementos orbitales.

### 3.2 Hamiltoniano y variables canónicas

En ausencia de fenómenos disipativos el Hamiltoniano es la energía cinética mas la potencial del objeto para el cual se buscan las ecuaciones. El Hamiltoniano (energía total) de una partícula sin masa en el campo generado por la masa  $M_0$  en variables no canónicas es simplemente

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (31)$$

con  $\mu = k^2 M_0$  y en canónicas de Delaunay es

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} \quad (32)$$

Las variables canónicas de **Delaunay** son

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, & M \\ G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, & \omega \\ H &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i, & \Omega \end{aligned} \quad (33)$$

y las ecuaciones canónicas son

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial M}, \quad \frac{dM}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial L} \quad (34)$$

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial G} \quad (35)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Omega}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial H} \quad (36)$$

Es fácil probar que a partir de las ecuaciones canónicas podemos llegar a las de Lagrange, siguiendo por ejemplo Valtonen and Karttunen (2006, cap 9). Claramente las canónicas por ser mas simples son mas fáciles de manipular y con ellas es mas fácil encontrar las constantes de movimiento pues si una variable esta ausente en el Hamiltoniano entonces su conjugada es constante. Como en el problema de una partícula en órbita heliocéntrica  $\mathcal{H}$  solo depende de la variable  $L$  y no hay función perturbadora  $R$  de las ecuaciones canónicas se deduce que todas las variables son constantes excepto

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} = \sqrt{\mu/a^3} = n \quad (37)$$

bastante obvio.

### 3.3 Movimiento relativo de dos cuerpos

En el caso general del problema de 2 cuerpos en donde los 2 tienen masa, para no tener que resolver el movimiento por separado es conveniente estudiar el movimiento relativo. Para poder reproducir las ecuaciones del movimiento relativo de 2 cuerpos (es decir en un sistema no inercial) es necesario definir el Hamiltoniano con un factor extra  $\mu^*$ :

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2}\mu^{*3} \quad (38)$$

siendo  $\mu = k^2(m_1 + m_2)$  y

$$\mu^* = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \quad (39)$$

y a su vez las variables de Delaunay  $(L, G, H)$  también están todas factorizadas por  $\mu^*$ , de lo contrario no se obtiene exactamente la ecuación (37), ver Murray and Dermott (1999, 2.10). Para problemas cada vez más complejos es necesario escribir el Hamiltoniano como suma de las energías cinéticas y potenciales, separar lo que puede considerarse como movimiento Kepleriano de 2 cuerpos y por otro lado lo que sería la perturbación.

Como ya dijimos, las coordenadas baricéntricas  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  son también canónicas pero no son útiles para las teorías pues son de variación muy rápida. Suelen usarse en los llamados integradores simplecticos, integradores numéricos que utilizan las propiedades de los sistemas Hamiltonianos para mantener su exactitud (el algoritmo de integración es una transformación canónica).

**Ejercicio.** Probar que con el Hamiltoniano (38) y usando como variable canónica  $L = \mu^* \sqrt{\mu a}$  se obtiene  $dM/dt = n$ .

### 3.4 Espacio de fase extendido

Si consideramos un asteroide perturbado por un planeta de órbita definida (fija) tenemos que el Hamiltoniano que describe el movimiento del asteroide es

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - R(L, G, H, M, \omega, \Omega, \lambda_p(t)) \quad (40)$$

donde  $R$  es la función perturbadora expresada en variables canónicas y de  $\lambda_p(t)$  que define la posición espacial del planeta perturbador. Ver que  $\mathcal{H}$  es igual al término Kepleriano (no perturbado) del asteroide más la interacción gravitacional con el planeta. Sigue siendo igual a la energía total del asteroide (cuya energía potencial debido a la perturbación del planeta se incrementa en la cantidad  $-R$ , recordar que potencial y  $R$  tienen signo contrario) pero ya no es constante, es la energía heliocéntrica del problema de 2 cuerpos más la energía potencial aportada por el perturbador que depende del tiempo según las posiciones del asteroide y perturbador. Depende de los elementos del planeta que son fijos con excepción de su longitud o anomalía media que depende linealmente con el tiempo. O sea que  $\mathcal{H}$  depende explícitamente del tiempo pues  $\lambda_p$  depende linealmente del tiempo. Entonces el Hamiltoniano no es una constante.

Como  $\mathcal{H}$  no es constante definimos un nuevo Hamiltoniano que será constante y que sin embargo me permite estudiar el mismo problema original. Lo que hacemos es definir  $\lambda_p$  como una nueva variable coordenada y también su momento conjugado (que es una nueva variable

independiente, artificial, que no sabemos qué es)  $\Lambda_p$ . El nuevo Hamiltoniano se define siguiendo la regla (27) al introducir un nuevo juego de coordenada y momento

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{d\lambda_p}{dt} \Lambda_p \quad (41)$$

Véase que las nuevas ecuaciones canónicas quedan igual a las de antes y se agregan 2 ecuaciones mas

$$\frac{d\Lambda_p}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \lambda_p} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_p} \quad (42)$$

$$\frac{d\lambda_p}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \Lambda_p} = \frac{d\lambda_p}{dt} = n_p \quad (43)$$

La ultima no aporta nada nuevo y la primera no necesito resolverla para hallar la evolución del asteroide pues no aparece en las derivadas parciales de  $\mathcal{H}'$  que definen las ecuaciones para el asteroide. El nuevo Hamiltoniano definido de esa manera se incrementa en un grado de libertad mas pero se vuelve constante en el tiempo pues por definición no depende explícitamente del tiempo sino de una nueva variable. Si queremos hacer curvas de nivel de  $\mathcal{H}' = cte$  para ver por donde puede evolucionar el sistema tendremos que resolver la ecuación para  $\Lambda_p(t)$ , pero si estamos interesados en conocer la evolución secular del asteroide podemos hacer un promedio en  $\lambda_p$  de tal forma que esta variable desaparece en la función perturbadora media  $R$  y tendremos que  $\frac{\partial R}{\partial \lambda_p} = 0$ , entonces  $\Lambda_p = cte$  por lo que el termino  $n_p \Lambda_p$  que agregamos al Hamiltoniano podemos ignorarlo pues es una constante.

Ademas de las variables canónicas como las de Delaunay  $(L, G, H, l, g, h)$  donde  $(l, g, h) = (M, \omega, \Omega)$ , también podemos trabajar en variables no canónicas  $(a, e, i, \lambda, \omega, \Omega)$  por ejemplo y usar las ecuaciones planetarias de Lagrange. O podemos pasar a otro conjunto de variables canónicas, las de **Poincare** por ejemplo se obtienen por una transformación de contacto (es un tipo de transformación canónica)

$$\Lambda\lambda + \Gamma\gamma + Zz = Ll + Gg + Hh \quad (44)$$

donde  $(\lambda, \gamma, z) = (\lambda, -\varpi, -\Omega)$  y  $(\Lambda, \Gamma, Z) = (L, L-G, G-H)$ . La función  $R$  hay que ponerla en función de las variables canónicas que estemos usando. La ventaja de usar variables canónicas es que la ecuaciones conservan la forma canónica. En los problemas planteados con la formulación hamiltoniana lo que se busca es ir eliminando términos de  $R$  a través de transformaciones canónicas. Delaunay hizo unas 460 a mano para estudiar el movimiento de la Luna y recién en el siglo XX se encontraron errores en tres de ellas.

### 3.5 Asteroide perturbado por planeta

Supongamos que tenemos un planeta con elementos orbitales fijos, entonces como ya vimos  $R$  va a depender explícitamente del tiempo solo a través de la longitud media del planeta. La  $\lambda$  del asteroide no esta en función del tiempo, es una variable a resolver. Para eliminar la dependencia temporal del Hamiltoniano (a través de  $\lambda_p$ ) se pasa al espacio de fase extendido donde  $\lambda_p$  del planeta es una nueva variable y el nuevo Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}' = -\frac{\mu}{2a} + n_p \Lambda_p - R \quad (45)$$

donde  $\Lambda_p$  es el 'momento conjugado' de  $\lambda_p$  que si trabajamos con ecuaciones medias (eliminando la dependencia con los ángulos de variación rápida) no complica para nada las ecuaciones

que nos interesan para el asteroide, como ya vimos. Pero si la órbita del planeta cambia continuamente su nodo y perihelio de forma conocida  $\varpi_p(t), \Omega_p(t)$  podemos definir un nuevo Hamiltoniano en forma análoga a como hicimos antes

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + n_p \Lambda_p - \dot{\varpi}_p \Gamma_p - \dot{\Omega}_p Z_p \quad (46)$$

donde  $\Gamma_p, Z_p$  son los 'momentos conjugados' de  $-\varpi_p, -\Omega_p$ . Cuidado, no necesariamente  $\Gamma_p, Z_p$  tienen una forma análoga a los momentos del asteroide. Por ejemplo, ver que la ecuación

$$\frac{d\Gamma_p}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial(-\varpi_p)} = -\frac{\partial R}{\partial \varpi_p} \neq 0 \quad (47)$$

por lo que  $\Gamma_p$  varia con el tiempo lo cual no tendria sentido si  $\Gamma_p$  fuera igual a  $L_p - G_p$  que son fijos. En cambio  $\dot{\varpi}_p$  y  $\dot{\Omega}_p$  son cantidades conocidas y constantes, y se pueden agregar otros términos similares si se consideran varios planetas, ver Morbidelli (2002a, cap. 8). De esta forma se obtiene el Hamiltoniano para un asteroide perturbado por un sistema de planetas cuyo movimiento es conocido de antemano. No es el Hamiltoniano de N cuerpos sino el de una partícula sin masa perturbada por planetas que se mueven en elipses que varían sus nodos y perihelios de forma conocida de antemano.

### 3.6 Asteroide perturbado por N planetas circulares y coplanares

El Hamiltoniano para el estudio de la evolución secular de un asteroide perturbado por  $N$  planetas circulares y coplanares (que no se perturban entre sí) es una generalización de (45). Basta agregar las  $R_i$  de cada planeta perturbador y pasar  $N$  veces al espacio de fase extendido:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2a} + \sum_{i=1}^N n_i \Lambda_i - \sum_{i=1}^N R_i \quad (48)$$

donde la sumatoria en  $\Lambda_i$  como ya dijimos es irrelevante si vamos estudiar el caso secular promediando en las longitudes pues resultan ser términos constantes que pueden ignorarse. Lo importante es que en las  $R_i$  no están los términos que dependen de las longitudes medias pues hicimos un promedio. Esos términos se eliminan por métodos analíticos o numéricos como explicaremos mas adelante. Las  $R_i$  solo dependen de los elementos orbitales del asteroide y en el caso de planetas circulares y coplanares entre ellos (no necesariamente con el asteroide) es del tipo  $R(a, e, i, \omega)$ , claro que expresada en variables canónicas. Si el planeta perturbador tiene órbita elíptica también aparecerá el  $\Omega$  del asteroide pues se pierde la simetría acimutal del sistema perturbador y hay una dirección privilegiada que es la dirección definida por el perihelio del planeta. En el caso de planeta en órbita circular no hay una dirección y la perturbación secular de los planetas es análoga a la de anillos circulares (Thomas and Morbidelli, 1996; Gallardo et al., 2012). Si las  $R_i$  son expresiones analíticas seguramente hay limitaciones de validez como que el asteroide no se aproxime a los planetas. Pero si son calculadas numéricamente no hay limitaciones, como se muestra en Thomas and Morbidelli (1996).

### 3.7 Hamiltoniano del problema de N cuerpos

Una partícula sin masa tiene el juego de variables canónicas que vimos previamente pero si consideramos  $N$  cuerpos perturbándose mutuamente las variables de Delaunay astrocentricas tal como las vimos para cada cuerpo no son canónicas. Es necesario construir un juego canónico lo cual se encuentra bien explicado en Morbidelli (2002a, cap 1) y en Tremaine (2023, cap 4). En un

sistema inercial como el baricentrico las coordenadas rectangulares y los momentos conjugados de todos los cuerpos ( $x_i, p_i = m\dot{x}_i$ ) constituyen un conjunto canónico con el Hamiltoniano igual a la energía total del sistema. Podemos definir elementos orbitales y variables canónicas de Delaunay en el sistema baricentrico pero la estrella central sería una incógnita más. En el caso de una estrella más 2 planetas por ejemplo esto aumentaría notoriamente la complejidad del problema.

Uno puede verse tentado a pasar a un sistema heliocéntrico a efectos de eliminar las ecuaciones debidas a la estrella central, pero esa transformación de coordenadas no es canónica. En cambio es canónica la transformación que lleva a posiciones heliocéntricas pero velocidades baricéntricas. Expresamos el Hamiltoniano en estas variables híbridas y tenemos las ecuaciones canónicas. A este sistema se le llama **de Poincare o democrático heliocéntrico**. Podemos definir los elementos orbitales de las cónicas en forma análoga al sistema heliocéntrico aunque aparecerán algunos factores extras. A partir de estos elementos orbitales podemos definir variables análogas a las de Delaunay o Poincare. Pero lo más curioso de este sistema de Poincare es que la función perturbadora depende también de las velocidades. El Hamiltoniano total en estas coordenadas se puede escribir como suma de varios  $\mathcal{H}_0^j(x, p)$  más otras cosas, siendo estos los Hamiltonianos de problema Kepleriano de cada planeta  $j$ . A estos  $\mathcal{H}_0^j(x, p)$  se les puede asociar elementos orbitales, pero serían un tanto especiales pues estarían definidos por  $x$  heliocéntricos y  $p$  baricéntricos.

Otra alternativa es pasar al sistema de **coordenadas de Jacobi** que puede verse por ejemplo en Malhotra (2012) y en Tremaine (2023, cap 4). Es muy útil en **sistemas jerárquicos**, es decir órbitas separadas, pero en otros casos como órbitas donde perihelios y afelios se entrecruzan es posible observar variaciones orbitales que no son muy representativas de las variaciones reales.

### 3.7.1 Estrella más dos planetas

Para el problema más simple de estrella más dos planetas de masas  $M_0, m_1, m_2$  es necesario trabajar en un referencial canónico. En Gallardo, T. et al. (2021) se explican los dos más usados: Jacobi y Poincare. Según Lee and Peale (2003, sec. 3) el Hamiltoniano en coordenadas de Jacobi se expresa:

$$\mathcal{H} = -k^4 \frac{M_0^3 m_1^3}{2(M_0 + m_1)L_1^2} - k^4 \frac{(M_0 + m_1)^3 m_2^3}{2(M_0 + m_1 + m_2)L_2^2} - R \quad (49)$$

donde la función perturbadora es

$$R = k^2 M_0 m_2 \left( \frac{1}{\Delta_{02}} - \frac{1}{r_2} \right) + k^2 m_1 m_2 \left( \frac{1}{\Delta_{12}} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (50)$$

siendo  $L_i$  las variables de Delaunay  $L$  en el sistema Jacobi,  $\Delta_{i2}$  son las distancias mutuas entre  $m_2$  y  $m_i$  y  $r_2$  es la distancia de  $m_2$  al baricentro de  $M_0$  y  $m_1$ . Viendo ec. (49) podemos notar que el primer término es el Hamiltoniano de 2 cuerpos siendo uno  $M_0$  y el otro  $m_1$ . Y el segundo término corresponde al de 2 cuerpos siendo uno  $(M_0 + m_1)$  y el otro  $m_2$ . Los movimientos medios correspondientes (no perturbados) son  $n_i = \sqrt{\mu_i/a_i^3}$  con  $\mu_1 = k^2(M_0 + m_1)$  y  $\mu_2 = k^2(M_0 + m_1 + m_2)$  con los  $a_i$  obtenidos con la ecuación de la energía (31) pero con las  $(r, v)$  según el sistema de Jacobi. Los  $n_i$  observados serán algo diferentes debido a las perturbaciones como vimos en la ec. (13). De esta forma podemos definir elementos Keplerianos para ambos planetas en el sistema de Jacobi. Quizás sean parecidos pero no son iguales a los

elementos Keplerianos heliocéntricos que aprendimos en nuestra infancia. Si queremos resolver analíticamente el problema debemos encontrar un desarrollo analítico para  $R$ . Lee and Peale (2003) utilizan el desarrollo truncado de octupolo que veremos en 4.8 que es solo válido para sistemas jerárquicos, o sea cuando  $a_1/a_2$  es pequeño.

### 3.7.2 Estrella y tres planetas

Supongamos que estamos trabajando en las coordenadas canónicas adecuadas, entonces el Hamiltoniano del sistema sería

$$\mathcal{H} = H_{K1} + H_{K2} + H_{K3} - R_{12} - R_{13} - R_{23} \quad (51)$$

donde los  $H_K$  serían las componentes Keplerianas para cada planeta y las  $R$  las interacciones gravitacionales entre los planetas. Escribir las  $R_{ij}$  en coordenadas rectangulares canónicas no es complicado pero sí lo es pasarlas a coordenadas canónicas de Delaunay o Poincare por ejemplo. Es aquí donde aparecen los desarrollos en serie y en donde debemos escoger con que términos nos quedamos. Si nos interesa la evolución a largo plazo del sistema, si los planetas 1 y 2 están próximos a una resonancia entonces  $R_{12}$  debe incluir los términos resonantes y los seculares, mientras para  $R_{13}$  y  $R_{23}$  solo serían relevantes los seculares.

### 3.8 Elementos astrocéntricos, baricéntricos, Poincare, Jacobi...

Los elementos orbitales quedan definidos por el origen adoptado para posición y velocidad y por la definición de  $\mu$ . Si existe cierta libertad en la elección de esos elementos, cual es el sistema más conveniente? Tal vez sea más conveniente aquel en donde aquellos objetos que siguen una evolución secular presenten las mínimas variaciones en  $a$ . En las figuras 3 y 4 mostramos los resultados de un experimento numérico en donde se integraron partículas por 100 revoluciones orbitales y se calculan las variaciones en el  $a$  osculante según diferentes sistemas. Algunas variaciones son debido a perturbaciones reales pero otras son debidas a fluctuaciones en el semieje por una mala elección del origen: en el sistema solar interior es mejor el heliocéntrico, en el exterior es mejor el baricéntrico y entre los gigantes los 2 son comparables pues las variaciones en  $a$  son debidas a efectos dinámicos fuertes. En el sistema heliocéntrico la constante usada fue  $\mu = k^2 M_\odot$  y en el baricéntrico fue  $\mu = k^2 M_{tot}$ , o sea considerando que toda la masa del sistema está en el origen. Pero este no es un detalle menor, si en vez de la masa total solo incluimos en  $\mu$  la masa solar aparecen oscilaciones ficticias a lo largo de todo el espacio. Zanardi y de Elía (comunicación personal, 2016) notaron que en el problema de dos cuerpos estrella-planeta para que los semiejes baricéntricos verifiquen  $Ma_* = ma_p$  (que es la solución analítica) el factor a utilizar para calcular el semieje baricéntrico del planeta debe ser  $\mu = k^2 M^3 / (M + m)^2$ . No solo eso sino que también encontraron que cualquier otro valor que se use para  $\mu$  genera que la órbita del planeta presente oscilaciones en el semieje y en otros elementos orbitales, lo cual es absurdo pues es el problema de dos cuerpos y las órbitas son fijas. Roig (comunicación personal, 2020) lo demuestra así: el  $\mathcal{H}$  baricéntrico es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v_p^2 - k^2 \frac{M m}{r} \quad (52)$$

donde  $r$  es la distancia mutua. Ponemos  $v$  de la estrella en función de  $v_p$  y  $r$  en función de  $r_p$  (distancia baricéntrica del planeta) y tenemos

$$\mathcal{H} = \left[ \frac{1}{2} v_p^2 - k^2 \frac{M^3}{(M + m)^2} \frac{1}{r_p} \right] m^* \quad (53)$$

donde si ignoramos el factor constante  $m^* = (M + m)m/M$  y comparando con ec. (31) se puede ver que esta es la energía orbital de una partícula que orbita a una masa  $M^3/(M + m)^2$ . O sea, el movimiento baricentrico de  $m$  es equivalente al de una partícula orbitando una masa  $M^3/(M + m)^2$ .

Presumiblemente el sistema de Jacobi sería el más apropiado en general, tal vez eso es lo que sugiere la figura 5 en la cual vemos que las oscilaciones son mínimas en las regiones donde no hay encuentros con los planetas. Pero la manera más civilizada de definir el sistema sería plantear el Hamiltoniano para la partícula y definir la parte Kepleriana (como la ec. (53) a partir de la cual se define el  $\mu$  o masa central y de allí el semieje con la ecuación de la energía) de forma que la perturbación sea mínima. En la figura 6 mostramos la evolución de Urano en 3 sistemas, en el heliocéntrico hay notables variaciones debidas a los términos indirectos de las perturbaciones planetarias. Si estamos estudiando la evolución de un objeto como un cometa que evoluciona atravesando las órbitas de varios planetas aparecerán en sus elementos variaciones que deberemos interpretar como efectos dinámicos y efectos debidos a la elección del referencial, pero estos últimos son solo realmente importantes cuando consideramos cometas débilmente ligados al Sol (cometas de la nube de Oort por ejemplo).

### 3.8.1 Elementos osculantes y medios

Tengamos en cuenta que las teorías seculares y resonantes describen la evolución de los elementos medios, es decir eliminando fluctuaciones de corto período. Si queremos aplicar alguna teoría secular al Sistema Solar no podemos tomar los elementos osculantes en cierto instante para introducirlos en el modelo teórico sino que deberíamos integrar numéricamente y calcular los elementos promediados en cierto lapso; esos son los que entran en las teorías. En general los elementos en el sistema de Jacobi presentan menores variaciones de corto periodo pero sus valores medios no tienen por qué coincidir con los medios astrocentricos por ejemplo.

## 3.9 Sistemas Hamiltonianos y Caos

### 3.9.1 Integrabilidad

Se entiende que los sistemas Hamiltonianos son sistemas que se describen con las ecuaciones canónicas y son conservativos. Los sistemas que se pueden escribir como ecuaciones de Hamilton poseen una serie de propiedades que se pueden ver por ejemplo en Hilborn (1994, cap 8) o en Korsch et al. (2008, cap 2). En particular, un sistema Hamiltoniano de  $N$  grados de libertad que es integrable, es decir que admite una solución analítica, debe ser posible expresarlo en función de los  $N$  pares de variables canónicas **ángulo-acción**  $(\theta_i, I_i)$  donde el Hamiltoniano,  $\mathcal{H}(I_i)$ , solo depende de las acciones  $I_i$  y por lo tanto de las ecuaciones canónicas se deduce que las acciones son constantes y los ángulos  $\theta_i$  varían linealmente con el tiempo siguiendo  $N$  frecuencias  $\nu_i$  constantes, que son las **frecuencias fundamentales** del sistema. Si logramos expresar el Hamiltoniano en estas variables las ecuaciones resultan triviales por lo cual el problema consiste no ya en resolver las ecuaciones sino en encontrar las transformaciones canónicas que me llevan al sistema de variables ángulo-acción. Existe una definición formal de las acciones, que llamaremos  $J_i$ :

$$J_i = \oint p_i dq_i \quad (54)$$

y si bien para calcularlas no es necesario conocer la dependencia temporal de  $(q_i, p_i)$ , si es necesario conocer la trayectoria en el espacio de fase.

Una manera de saber si un sistema es integrable o no es analizar el **espectro de Fourier** de algunas de sus variables. Si aparecen unas pocas frecuencias bien definidas estas serán

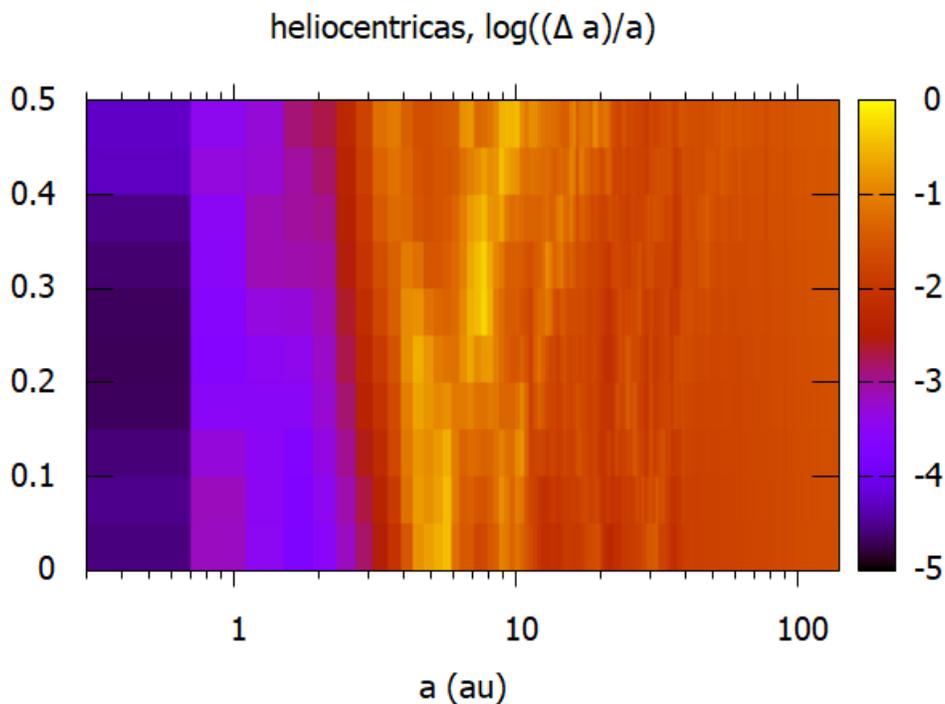


Figure 3: Mapa dinámico mostrando variaciones en semieje. Integramos partículas test con  $i = 30, \omega = 90$  en una grilla de  $0.3 < a < 140$  ua y  $0 < e < 0.5$ . Calculamos las máximas variaciones en  $a$  según sistema heliocéntrico. Las variaciones de la región derecha no son representativas de cambios dinámicos.

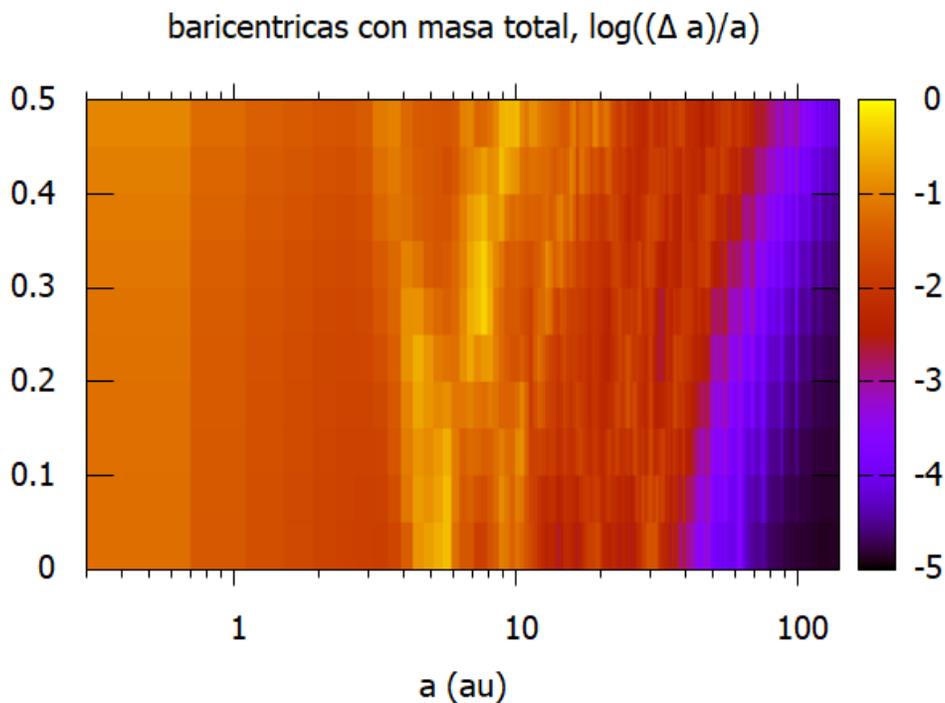


Figure 4: Mapa dinámico mostrando variaciones en semieje. Integramos partículas test con  $i = 30, \omega = 90$  en una grilla de  $0.3 < a < 140$  ua y  $0 < e < 0.5$ . Calculamos las máximas variaciones en  $a$  según sistema baricéntrico. Las variaciones de la región izquierda no son representativas de cambios dinámicos.

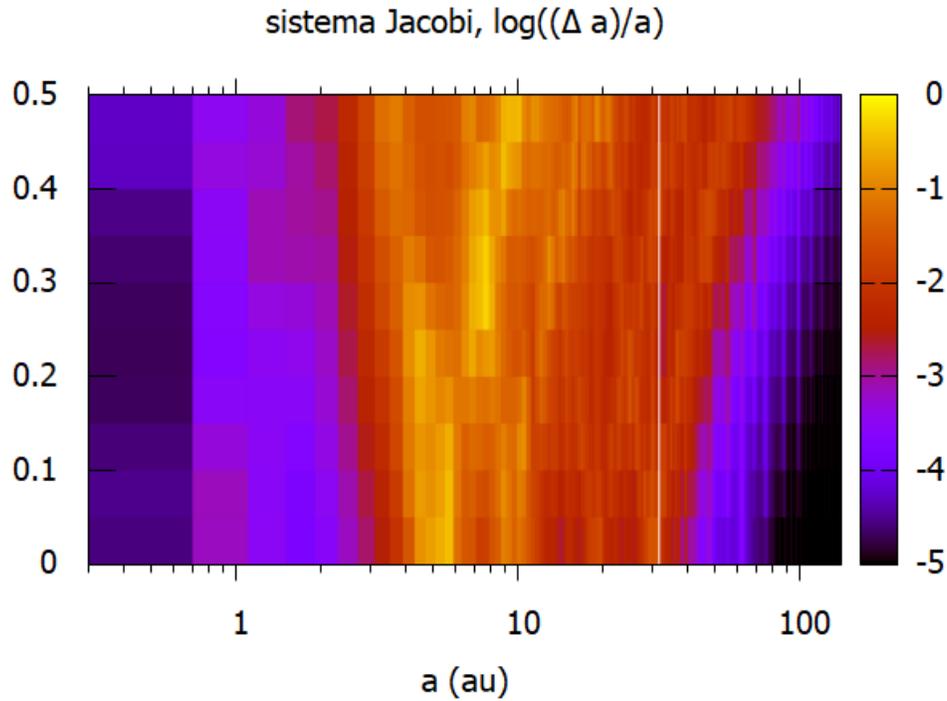


Figure 5: Mapa dinámico mostrando variaciones en semieje. Integramos partículas test con  $i = 30, \omega = 90$  en una grilla de  $0.3 < a < 140$  ua y  $0 < e < 0.5$ . Calculamos las máximas variaciones en  $a$  según sistema de Jacobi. En este caso no parece haber variaciones espureas.

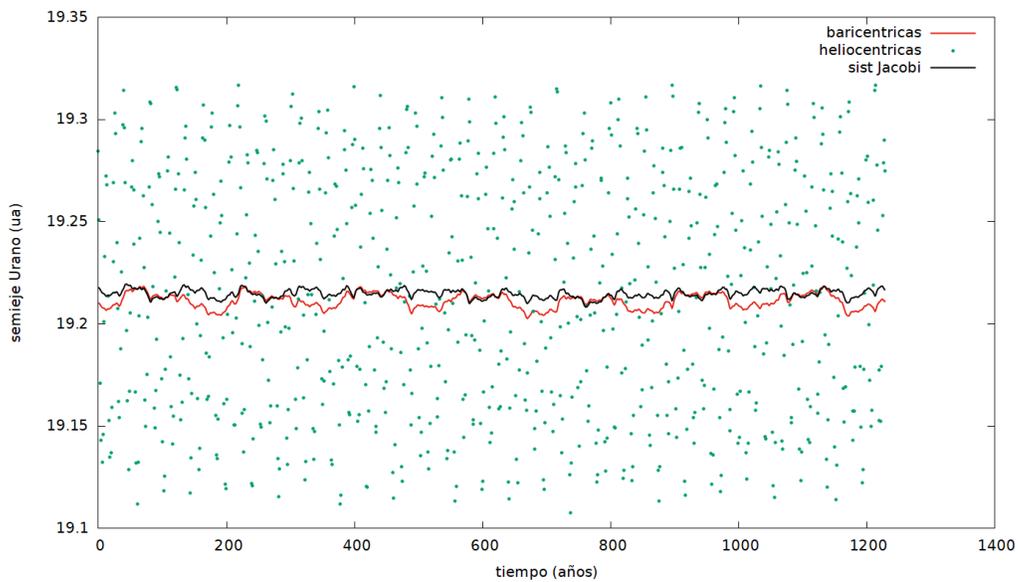


Figure 6: Evolución de Urano integrando todo el sistema planetario en diferentes sistemas. Gente: cualquier cosa menos heliocéntrico...

las frecuencias fundamentales o combinaciones de ellas. Si no hay frecuencias bien definidas es porque no hay frecuencias fundamentales y por lo tanto no es integrable, o sea es caótico. Claro que siempre hay una escala de tiempo asociada. En cierta escala el sistema puede comportarse como integrable y en una escala mayor como no integrable. O sea, en ese caso el sistema es no integrable pero en una cierta escala reducida de tiempo el Hamiltoniano se puede aproximar por uno integrable.

Si en un Hamiltoniano de  $N$  grados de libertad podemos probar la existencia de  $N$  integrales del movimiento independientes entonces es integrable (**teorema de Liouville-Arnold** en una versión apurada). Esto significa que todos los Hamiltonianos independientes del tiempo de 1 grado de libertad,  $\mathcal{H}(\theta, I)$ , son integrables pues existe la constante  $\mathcal{H}(\theta, I) = cte$ . Entonces, para encontrar la solución, si existe, un camino muy popular es buscar las constantes de movimiento del sistema (energía, momento angular, etc). También son integrables los sistemas cuyas ecuaciones sean lineales en  $q$  y  $p$ . Y también aquellos sistemas cuyos Hamiltonianos se puedan poner como suma de Hamiltonianos desacoplados de un grado de libertad. De aquí el afán por intentar expresar nuestros Hamiltonianos como suma de Hamiltonianos de 2 cuerpos.

En general los sistemas en la naturaleza son caóticos o **cuasi integrables**, es decir, no integrables pero es posible encontrar Hamiltonianos próximos al original y que son integrables y para los cuales podemos buscar las variables ángulo acción mediante una serie de transformaciones canónicas. En una escala de tiempo acotada el sistema es equivalente al modelo simplificado, pero si exploramos en escalas mucho mayores seguramente encontraremos caos.

### 3.9.2 Liouville y Lyapunov

Un sistema Hamiltoniano evoluciona en el tiempo siguiendo una trayectoria en el espacio de fase de  $2N$  dimensiones  $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ . Diferentes condiciones iniciales definen diferentes trayectorias. Las trayectorias temporales  $2N$  dimensionales del sistema nunca se cortan (que pasaría si lo hicieran?). Una propiedad notable de los sistemas Hamiltonianos constituye el teorema de Liouville que dice que si escogemos un cierto volumen del espacio de fase conteniendo un conjunto de condiciones iniciales, con el transcurso del tiempo el volumen se preserva. Puede cambiar la forma, pero el volumen y el número de estados dentro del volumen se preserva, o sea la densidad de estados se preserva. En general, estos volúmenes se retuercen enormemente sin variar su volumen. Lo podemos ver.

Sean dos trayectorias A y B en el espacio  $2N$  dimensional y llamemos  $s_j = x_j(B) - x_j(A)$  a la diferencia entre las 2 trayectorias de la coordenada o momento genérica  $x_j$  que puede ser una  $q$  o una  $p$ . A su vez la evolución de la variable  $x_j$  verifica:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j(A) &= f_j(A) \\ \dot{x}_j(B) &= f_j(B)\end{aligned}$$

donde  $f_j$  es la ecuación canónica correspondiente. Si restamos obtenemos:

$$\dot{s}_j = f_j(B) - f_j(A) = \frac{\partial f_j}{\partial x_j} s_j = \lambda_j s_j$$

y si integramos:

$$s_j(t) = s_j(0)e^{\lambda_j t}$$

donde los  $\lambda_j$  con conocidos como exponentes de Lyapunov e indican como crece la distancia entre ambas trayectorias en la componente  $x_j$ . En total son  $2N$  coeficientes de Lyapunov y ya

que las  $f_j$  son derivadas parciales de  $\mathcal{H}$  respecto a las variables entonces los  $\lambda_j$  son derivadas parciales segundas mixtas del Hamiltoniano. La mitad de ellas tiene signo positivo y la otra son las mismas derivadas con signo negativo (recordar la forma de las ecuaciones canónicas) por lo cual la suma de todos los  $\lambda_j$  es cero. Si consideramos todas las coordenadas y momentos y multiplicamos obtenemos:

$$V(t) = V(0)e^{(\sum \lambda_j)t}$$

donde  $V = s_1 \cdot \dots \cdot s_{2N}$  es el volumen en el espacio de fase. Bueno, la conclusión es que en un sistema Hamiltoniano el volumen inicial ocupado por cierto conjunto de estados del sistema se mantiene constante. El volumen se puede estirar y retorcerse pero el volumen es constante. Si todos los  $\lambda$  son nulos el sistema es regular, integrable o no (ninguna coordenada se separa exponencialmente). Si hay algún  $\lambda$  negativo habrá necesariamente uno positivo y eso implica que esa coordenada evoluciona exponencialmente, y esto es caos. El caos se manifiesta en algunas variables, no en todas. En la practica para estimar los exponentes de Lyapunov se emplean métodos numéricos que integran la evolución de una partícula y su *sombra*. Pero es necesario hacer una advertencia: en un sistema caótico las integraciones hacia atrás en el tiempo no convergen sino que también divergen y con el mismo coeficiente que al futuro. En un sistema caótico integrar para atrás en el tiempo buscando el pasado dinámico del sistema no tiene sentido mas allá de la escala de tiempo de Lyapunov que es el inverso del coeficiente. Mas allá de la escala de tiempo de Lyapunov la dinámica hacia el pasado es estadísticamente igual a la dinámica hacia el futuro, ver por ejemplo Morbidelli et al. (2020). Recordar que la solución de un sistema Hamiltoniano integrable esta dada por momentos constantes y ángulos que varían linealmente con el tiempo, o sea nunca serian soluciones exponencialmente divergentes, por eso un  $\lambda_j$  positivo nunca puede ser asociado a una solución de un Hamiltoniano integrable. Dos excelentes libros sobre caos aplicado a sistemas planetarios son Shevchenko (2020) y Ferraz-Mello (2021). Un indicador de caos muy eficiente es el MEGNO (Cincotta and Simó, 2000) y que se ha popularizado mediante la rutina ofrecida en el paquete REBOUND.

### 3.9.3 KAM y Poincare-Birkhoff

Consideremos un sistema de 2 grados de libertad integrable, o sea que el Hamiltoniano es del tipo  $\mathcal{H}(I_1, I_2)$ . Existen entonces las variables angulo acción donde las  $I_i = cte$  y los  $\dot{\theta}_j = \nu_j = cte$ . La evolución del sistema se puede representar en la superficie de un toro con radio interno  $I_2$  y radio mayor  $I_1$ . Las trayectorias sobre el toro dependerán de los valores de los  $\nu_j$ : si el cociente  $\nu_1/\nu_2$  fuera irracional la trayectoria acaba ocupando toda la superficie del toro (toro irracional). Si el cociente es un numero racional entonces la trayectoria es un fideo cuya cola acaba encontrándose con su cabeza (toro racional) y el sistema no recorre todo el espacio de fase (a estas trayectorias también se las conoce como **orbitas periodicas**). Los toros irracionales representan **sistemas ergodicos**: la media temporal de los estados es igual a la media en el espacio de fase. Que implica esto: si queremos el valor medio no tenemos que evaluar el sistema desde  $t = 0$  hasta infinito sino que podemos integrar en el espacio, finito, de fase. Es mas o menos lo que hemos hecho y lo que seguiremos haciendo al calcular perturbaciones seculares.

Bien, ahora pensemos en un sistema mas real en donde el Hamiltoniano puede escribirse como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(I_i) + \mathcal{H}_1(\theta_i, I_i)$$

donde  $\mathcal{H}_1$  es una perturbación al Hamiltoniano integrable  $\mathcal{H}_0$ . Notar que ahora las  $I_i$  ya no son acciones pues  $\mathcal{H}$  ya no admite la solución que tenia  $\mathcal{H}_0$ . El teorema KAM nos dice que al

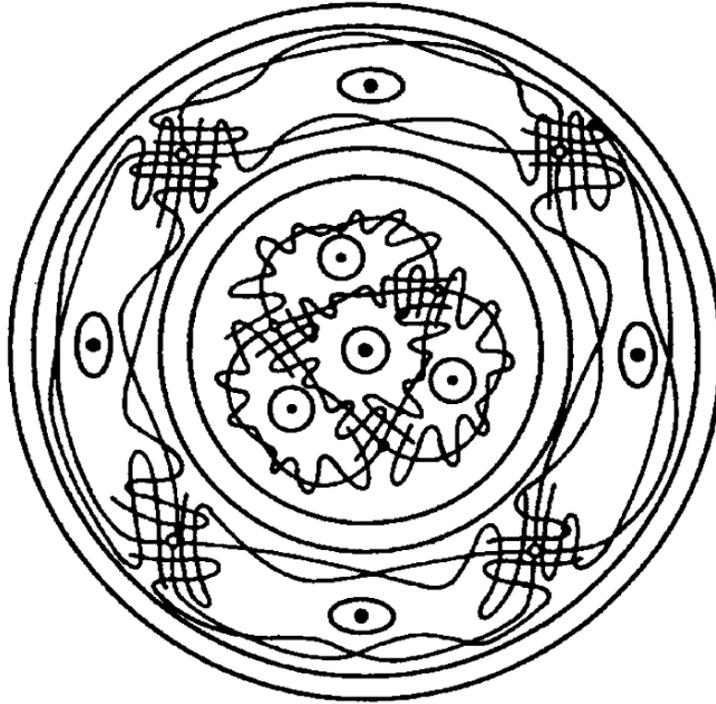


Figure 7: Corte de un sistema de 2 grados de libertad perturbado donde se observan toros KAM sobrevivientes a la perturbación (círculos) y toros destruidos que dan lugar a zonas de caos pero que incluyen nuevos toros irracionales (óvalos) en torno de trayectorias periódicas (toros racionales representados por puntos). Fuente Korsch et al. (2008).

incrementar la perturbación las primeras trayectorias que se destruyen son las correspondientes a los toros racionales y las ultimas en destruirse son las de los toros mas irracionales. La destrucción se debe a la aparición de caos y el teorema KAM también afirma que la región caótica en torno a la región ocupada por la trayectoria original es mayor cuanto menor sea el denominador  $s$  en la relación de enteros  $\nu_1/\nu_2 = r/s$ . Por ejemplo, la región caótica en torno a una trayectoria que originalmente verifica  $2/3$  es mayor que la región caótica que surge en las proximidades de  $3/7$ . Mientras la perturbación no sea excesivamente grande existirán toros irracionales deformados respecto a los originales pero no destruidos (llamados toros KAM), y que separan las regiones caóticas y las limitan en el espacio de fase.

Y el teorema Poincare-Birkhoff nos dice que si bien los toros racionales se destruyen algunas trayectorias sobreviven dentro de la zona caótica generando nuevos toros irracionales (ver fig 7). En el caso de un asteroide perturbado por un planeta estos teoremas nos dan pistas sobre que condiciones generan evoluciones mas caóticas y cuales generan trayectorias mas estables.

### 3.10 Flujo Hamiltoniano e integradores simplecticos

Sean  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  dos vectores representando las variables canónicas cada una de dimensión  $N$  y sean dos funciones arbitrarias  $f(q, p)$  y  $g(q, p)$  se define como corchete de Poisson:

$$\{f, g\} = \nabla_q f \nabla_p g - \nabla_p f \nabla_q g = \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (55)$$

Estos corchetes son muy útiles para determinar si un conjunto de variables es canónico pues se puede probar fácilmente que las variables  $(q_i, p_j)$  son canónicas si verifican

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

siendo  $\delta_{ij}$  la de Kronecker.

Si tenemos una función  $f(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ , o sea que evoluciona en el tiempo siguiendo la evolución de las variables canónicas (se dice que  $f$  evoluciona sobre el flujo Hamiltoniano) usando las ecuaciones canónicas se obtiene:

$$\frac{df}{dt} = \nabla_q f \dot{q} + \nabla_p f \dot{p} = \{f, \mathcal{H}\} \quad (56)$$

y la derivada segunda resulta

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \left\{ \frac{df}{dt}, \mathcal{H} \right\} = \{ \{f, \mathcal{H}\}, \mathcal{H} \} \quad (57)$$

por lo cual la función puede escribirse como un desarrollo en serie de Taylor

$$f(t) = f(0) + \sum_i \frac{t^i}{i!} L_{\mathcal{H}}^i f(0) \quad (58)$$

siendo  $L_{\mathcal{H}}^i$  el operador de Lie, y a toda la sumatoria se le llama operador serie de Lie aplicado a  $f$  sobre el flujo de  $\mathcal{H}$ . Entonces una función que verifica lo anterior sigue la evolución temporal del sistema Hamiltoniano, en particular  $f$  puede ser cualquiera de las variables canónicas. Si tomamos un lapso temporal pequeño podemos truncar en orden 1 o 2 generando un integrador numérico simplectico que me da la evolución temporal de las variables canónicas. O sea que la evolución temporal de un sistema Hamiltoniano escrito en variables canónicas es una sucesión de transformaciones canónicas por lo cual es posible construir algoritmos de integración que preserven el Hamiltoniano. Estos son los integradores **simplecticos** y el **leapfrog** es uno de ellos. Ver Mikkola (2020, cap 6).

Llamando  $F = L_{\mathcal{H}}$ , por su analogía con la función exponencial podemos reescribir la ecuación (58) como

$$f(t) = \exp(tF)f(0) \quad (59)$$

donde  $\exp(tF)$  es un operador aplicado a  $f(0)$ , y si  $t$  es pequeño podemos truncar en orden 1 o 2. La idea es separar el Hamiltoniano en 2 partes: una con solución analítica y la otra una pequeña perturbación:  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B$ , entonces podemos escribir

$$f(t) = \exp(t(A + B))f(0) \quad (60)$$

siendo  $A = L_{\mathcal{H}_A}$  y análogamente  $B$ . Como se puede ver en Chambers (1999), si despreciamos términos de segundo orden en  $t$  podemos escribir

$$\exp(t(A + B)) \simeq \exp(tA) \exp(tB) \quad (61)$$

entonces

$$f(t) = \exp(tA) \exp(tB)f(0) \quad (62)$$

lo cual significa que podemos aplicar primero un Hamiltoniano y luego el otro. Aplicar el integrable significa avanzar un paso con la solución analítica del problema integrable. Y luego

aplicando el otro estamos agregamos la perturbación. Esquemas de ordenes superiores se pueden ver por ejemplo Chambers (1999). Si  $\mathcal{H}_A$  es el integrable, el *leapfrog* tiene el siguiente esquema

$$f(t) = \exp\left(\frac{t}{2}A\right) \exp(tB) \exp\left(\frac{t}{2}A\right) f(0) \quad (63)$$

O sea, esto equivale a avanzar en la órbita Kepleriana medio paso, aplicar la perturbación correspondiente a todo el paso y luego avanzar otro medio paso. La perturbación se aplica en forma impulsiva pues genera un cambio abrupto de la velocidad manteniendo la posición fija. Eso significa que ese  $\mathcal{H}_B$  tiene forma de  $\delta$  de Dirac lo cual parece un tanto violento. Sin embargo la función  $\delta$  de Dirac es equivalente a una serie infinita de términos de alta frecuencia. Y así como vimos que eliminar términos de alta frecuencia no afecta la evolución a largo plazo, esta tampoco es afectada si agregamos infinitos términos de corto periodo de donde es lícito usar la aproximación impulsiva. Ver una buena síntesis de esta idea en Wisdom and Holman (1991).

Existe cierta libertad en elegir que partes quedan en el integrable y cuales van a la perturbación. Pero, lo que elijamos como Hamiltoniano integrable definirá los elementos orbitales como el semieje. Por lo general se busca que este semieje definido de esta forma sea representativo de la órbita que realmente realiza el objeto. Una buena revisión de los integradores se encuentra en Morbidelli (2002b).

### 3.11 Ejemplo ineludible: el péndulo

Un ejemplo de trayectorias en el espacio de fase de un Hamiltoniano de un grado de libertad son las que se obtienen en el Hamiltoniano del péndulo

$$\mathcal{H} = a(I - I_0)^2 + b \cos(\phi) \quad (64)$$

que pueden verse en la figura 8. En realidad este es un Hamiltoniano tipo péndulo pero péndulo propiamente es con  $I_0 = 0$ . Allí se identifican puntos de equilibrio ( $\dot{I} = \dot{\phi} = 0$ ) estables e inestables (para estudiar la estabilidad hay que calcular el Hessiano de  $\mathcal{H}$ ). Por los inestables pasan las separatrices que separan la región de oscilación (o libración) de la de circulación de  $\phi$ . Con una transformación canónica adecuada se podría llevar a las variables ángulo acción, asunto que no interesa demasiado pues el sistema es de fácil resolución.

Por las ecuaciones canónicas los puntos de equilibrio implican

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = a2(I - I_0) = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = -b \sin(\phi) = 0 \quad (66)$$

o sea que están en  $I = I_0$  y  $\phi = 0, 180$ . Notar que siempre que los parámetros  $a$  y  $b$  sean no nulos existirán 2 puntos de equilibrio. Sea  $(I_0, \phi_0)$  un punto de equilibrio, para estudiar la estabilidad suponemos pequeños desplazamientos  $(S, s)$  y vemos su evolución en el tiempo. Tenemos

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt}(0) + \dot{S} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \simeq -\mathcal{H}_\phi(0) - \mathcal{H}_{\phi\phi}s - \mathcal{H}_{\phi I}S \quad (67)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt}(0) + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} \simeq \mathcal{H}_I(0) + \mathcal{H}_{I\phi}s + \mathcal{H}_{II}S \quad (68)$$

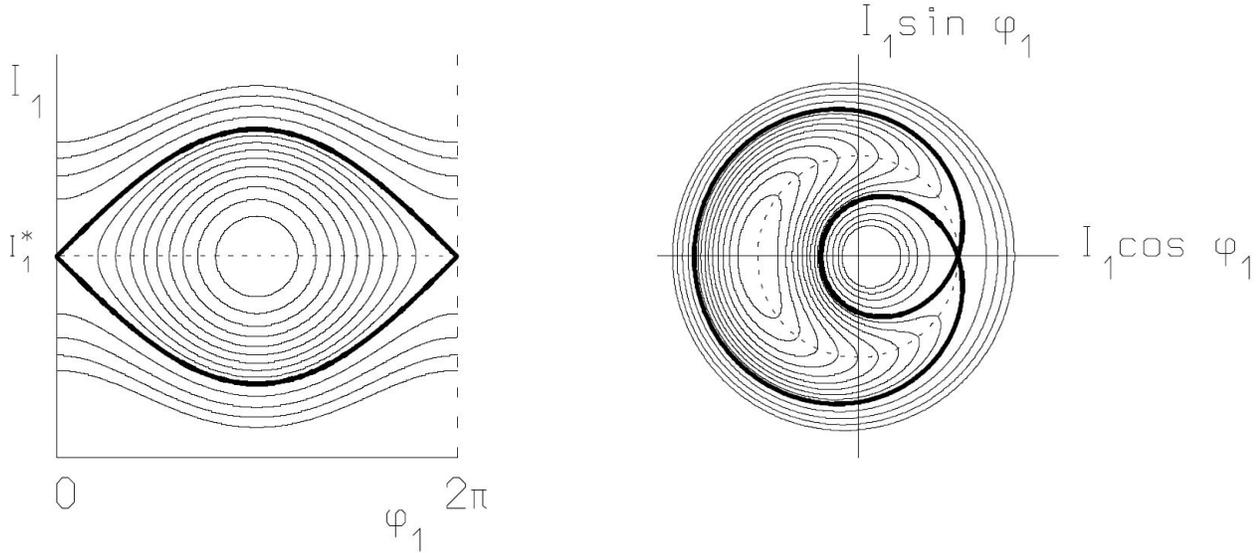


Figure 8: Curvas de nivel del  $\mathcal{H}(\phi, I)$  para el Hamiltoniano del péndulo. Izquierda en coordenadas rectangulares y derecha en polares donde se aprecia la separatriz y las libraciones en forma de banana. Fuente Morbidelli (2002a).

en donde lo que hicimos fue expandir a primer orden las derivadas parciales  $\mathcal{H}_\phi$  y  $\mathcal{H}_I$  en torno al punto de equilibrio. Tenemos entonces

$$\dot{S} = -\mathcal{H}_{\phi\phi}S - \mathcal{H}_{\phi I}S \quad (69)$$

$$\dot{s} = \mathcal{H}_{I\phi}S + \mathcal{H}_{II}S \quad (70)$$

Buscamos soluciones del tipo  $S = A \exp(\omega t)$ ,  $s = B \exp(\omega t)$  siendo  $\omega$  un parámetro a determinar que si es complejo puro implica oscilaciones estables. Sustituyendo obtenemos

$$A\omega = -\mathcal{H}_{\phi\phi}B - \mathcal{H}_{\phi I}A \quad (71)$$

$$B\omega = \mathcal{H}_{I\phi}B + \mathcal{H}_{II}A \quad (72)$$

de donde

$$A(\omega + \mathcal{H}_{\phi I}) + B\mathcal{H}_{\phi\phi} = 0 \quad (73)$$

$$A\mathcal{H}_{II} + B(\mathcal{H}_{I\phi} - \omega) = 0 \quad (74)$$

para que exista una solución diferente de  $A = B = 0$  debe cumplirse que el determinante sea nulo, o sea

$$\mathcal{H}_{\phi I}^2 - \omega^2 - \mathcal{H}_{II}\mathcal{H}_{\phi\phi} = 0 \quad (75)$$

y como en el pedulo  $\mathcal{H}_{\phi I} = 0$  nos queda

$$\omega^2 = -\mathcal{H}_{II}\mathcal{H}_{\phi\phi} \quad (76)$$

Si  $\omega^2 < 0$  los pequeños movimientos serán estables y el periodo de la oscilación sera

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{H}_{II}\mathcal{H}_{\phi\phi}}} \quad (77)$$

Si  $\omega^2 > 0$  el punto será inestable. Si este Hamiltoniano se perturba un poco agregando un pequeño término extra en la ec. 64 aparecerá caos en la región de la separatriz.

**Clases en video:**

- Clase 07: <https://youtu.be/N7A8dXMP16c>
- Clase 08: <https://youtu.be/ziccZAb3Wh8>

## 4 Teoría secular analítica

### 4.1 Eliminación de variables rápidas

Las teorías analíticas son aquellas que podemos construir a partir de una expresión analítica de  $R$ . Dada  $R$  analíticamente como desarrollos en series, se toman los términos relevantes o una expresión simplificada para  $R$ , se escriben las ecuaciones y se resuelven analíticamente o numéricamente. La cuestión es si hay alguna justificación teórica para hacer esto. Es cierto que es intuitivo que eliminar los términos de corto periodo debe ser valido para estudiar la evolución a largo plazo pero el asunto debería admitir alguna demostración mínima de que la nueva  $R$  media representa bien la evolución secular del sistema. Esto es lo que trata la teoría de perturbaciones. Los términos de variación rápida suelen ser irrelevantes para la evolución a largo plazo. Por ejemplo la perturbación (indirecta) que recibe un objeto con  $a > 165$  ua por parte de los planetas seria suficiente como para transformar su órbita heliocéntrica en una hipérbola, ver por ejemplo figura 2. Sin embargo el objeto no escapa pues poco tiempo después la perturbación actúa en sentido contrario disminuyendo nuevamente su energía orbital, y por esto las perturbaciones de variación rápida no tienen un efecto acumulativo. La cuestión es como "eliminar" de  $R$  los términos irrelevantes, es decir aquellos de variación rápida. En la teoría de perturbaciones encontramos diversos métodos que logran esto llegando al final a un sistema de resolución trivial. La forma fácil es directamente ignorar en  $R$  todo lo que dependa de variables rápidas (**método tijera**) o hacer un promedio en esas variables rápidas. Para entender la diferencia entre el método tijera y uno mas justificado veremos un poco como se trabaja en teoría de perturbaciones.

### 4.2 Teoría de perturbaciones

Lo que sigue es una forzosa síntesis de lo que puede verse por ejemplo en Morbidelli (2002a), Ferraz-Mello (2007) o en forma mas sintética en Shevchenko (2017, cap 2). Dado un Hamiltoniano cuasi integrable

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{H}_0(p) + \epsilon \mathcal{H}_1(q, p) \quad (78)$$

donde la diferencia entre el integrable  $\mathcal{H}_0$  y el completo es una parte  $\mathcal{H}_1$  multiplicada por un pequeño parámetro  $\epsilon$ , que típicamente es la masa del perturbador. La idea es encontrar una transformación canónica *próxima de la identidad*, es decir que las variables nuevas  $(q^1, p^1)$  y viejas difieren en una pequeña cantidad:

$$p = p^1 + \epsilon f(q^1, p^1)$$

$$q = q^1 + \epsilon g(q^1, p^1)$$

Y el Hamiltoniano en las nuevas variables tiene una nueva expresión

$$\mathcal{H}^1(q^1, p^1) = \mathcal{H}_0(p^1) + \epsilon \bar{\mathcal{H}}_1(p^1) + \epsilon^2 \mathcal{H}_2(q^1, p^1) \quad (79)$$

donde típicamente  $\bar{\mathcal{H}}_1$  es el resultado de promediar  $\mathcal{H}_1$  en los ángulos  $q$ . De esta forma el termino dependiente de  $(q^1, p^1)$  pasa a ser de orden 2 en el pequeño parámetro. Podríamos volver a aplicar el procedimiento y esto implicaría hacer una nueva media sobre  $\mathcal{H}_2$  en los ángulos  $q^1$ , pero véase que esto es diferente a promediar todo de una en los ángulos  $q$  como hubiéramos hecho en el método tijera. En (Cincotta, 2021, cap 3) se muestra un ejemplo.

Con sucesivas aproximaciones vamos llegando a un Hamiltoniano exclusivamente dependiente de los momentos (que serán acciones). Poincare demostró que estas series no son eternamente convergentes así que existe un orden  $r$  optimo a partir del cual ya no se gana nada mas. Los métodos de Von Zeipel y de Hori son algunos de los métodos mas relevantes. Estos métodos se conocen como *métodos formales* pues describen la operativa pero los detalles prácticos deberán resolverse caso a caso. Nosotros vamos a aplicar el método tijera, que es equivalente a un método formal hasta el primer orden en el pequeño parámetro.

### 4.3 Evolución secular por achatamiento

Si consideramos  $R$  hasta el termino  $J_2$  de un planeta de masa  $m_p$  y radio  $R_p$ , la función perturbadora sobre un satélite debido al achatamiento del planeta queda (Murray and Dermott, 1999, pag. 269)

$$R = -\frac{k^2 m_p}{r} J_2 \left(\frac{R_p}{r}\right)^2 P_2(\sin \phi) \quad (80)$$

donde  $\phi$  es la latitud del satélite y  $P_2(\sin \phi) = (1/2)(3 \sin^2 \phi - 1)$ . Recordar que el potencial total es  $V = V_0 - R$ , siendo  $V_0$  el Kepleriano. A su vez  $\sin \phi = \sin i \sin(\omega + f)$  siendo  $f$  la anomalía verdadera del satélite. Si promediamos en un periodo orbital  $T$  es lo mismo que promediar en anomalía media y haciendo cambio de variable a anomalía verdadera  $dt = r^2 df/h$  integramos y obtenemos la  $R_{sec}$

$$R_{sec} = \frac{1}{T} \int_0^T R dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} R \frac{r^2}{h} df = k^2 \frac{m_p R_p^2 J_2}{4a^3 (1-e^2)^{3/2}} (2 - 3 \sin^2 i) \quad (81)$$

donde hemos sustituido  $T = 2\pi \sqrt{a^3/(k^2 m_p)}$ . De acuerdo a las ecuaciones planetarias de Lagrange esta  $R_{sec}$  solamente genera una variación en  $(\omega, \Omega)$  manteniendo los demás elementos constantes, o sea la órbita gira sobre su dirección perpendicular (variación de  $\omega$ ) y sobre el eje del planeta (variación de  $\Omega$ ). El uso de las ecuaciones canónicas es notablemente ventajoso pues como

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - R(L, G, H) \quad (82)$$

tenemos que  $dL/dt = dG/dt = dH/dt = 0$ , o sea que  $(a, e, i)$  son constantes. Pero además se concluye que  $d\omega/dt$  y  $d\Omega/dt$  son constantes, cambian a un ritmo constante. Y también que  $dM/dt$  no es igual al movimiento medio  $n$  generado por el movimiento Kepleriano, tiene un termino extra debido a la perturbación. El periodo orbital real es diferente al Kepleriano pues el potencial no es Kepleriano. Y esto independientemente del movimiento del perihelio, que también se suma. El movimiento del perihelio es algo que preocupó a los soviéticos cuando lanzaron sus primeros satélites y lograron *congelar* ese movimiento colocando los satélites en una **inclinación crítica**, es decir una inclinación para la cual  $\omega$  queda fijo.

Esta expresión es válida para  $(e, i)$  arbitrarios pero para  $r \gg R_p$  debido a que solo consideramos hasta  $J_2$ . Si usamos una expresión más compleja para el potencial de un planeta la complejidad del cálculo aumenta pero el procedimiento es análogo.

### 4.4 Perturbación secular de planeta sobre asteroide

Cuando las perturbaciones son pequeñas (o sea en ausencia de encuentros próximos), para apreciar los efectos de  $R$  en el largo plazo promediamos en el tiempo la  $R$  correspondiente, o eliminamos las variables de variación rápida por un proceso de transformaciones canónicas o

por métodos mas sencillos. Si no existe una commensurabilidad evidente entre el periodo orbital del asteroide y del planeta (eso seria una resonancia) se puede probar que

$$\langle R \rangle_t = R_{sec} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (83)$$

promediar en el tiempo es equivalente a promediar en las variables de variación rápida, las longitudes medias de ambos cuerpos. Esto es valido porque el sistema es ergodico siempre que no haya commensurabilidad entre el movimiento del planeta y del asteroide. La media temporal de  $R$  es equivalente a un promedio de la  $R$  calculada en todas las configuraciones posibles asteroide-planeta. Dado que  $R$  es una serie de cosenos es fácil calcular esa integral doble pues todos los términos que dependen de  $\lambda$  o  $\lambda_p$  se anulan. O sea que promediar es equivalente a eliminar de  $R$  los términos que dependen de las variables rápidas (método de la tijera). En particular se puede ver que la parte indirecta de  $R$  tiene las longitudes medias en todos los argumentos por lo que se anula al hacer el promedio. Es importante tener en cuenta que al hacer esto también eliminamos perturbaciones que si bien dependen de ángulos rápidos lo hacen a través de combinaciones resonantes o cuasi resonantes. En nuestro sistema planetario es un claro ejemplo la cuasi commensurabilidad 5:2 entre Júpiter y Saturno que genera un termino  $5\lambda_S - 2\lambda_J$  de variación muy lenta (periodo de aprox. 950 años) que genera oscilaciones en varios cuerpos del sistema solar pero son especialmente importantes en los semiejes de Júpiter y Saturno (ver fig. 51). Esta **gran desigualdad** como la llamo Laplace la perdemos en este proceso de media y no podremos reproducir adecuadamente la evolución secular del sistema planetario pues estamos despreciando este termino, que es relevante.

En el caso de una perturbación por achatamiento de un planeta con simetría de revolución solo hay que hacer una integral, o sea promediar la perturbación a lo largo de todas las posiciones del objeto al recorrer su órbita. (Que pasa si no hay simetría de revolución? y si ademas el planeta rota?)

La expresión analítica de  $R_{sec}$  del planeta sobre el asteroide esta dada por todos los términos tales que  $j_1 = j_2 = 0$ . Como  $R_{sec}$  es independiente de  $\lambda$  las ecuaciones seculares quedan

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (84)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R_{sec}}{\partial \varpi} \quad (85)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R_{sec}}{\partial i} \quad (86)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R_{sec}}{\partial e} + \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R_{sec}}{\partial i} \quad (87)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R_{sec}}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R_{sec}}{\partial \Omega} \quad (88)$$

De donde se concluye el famoso resultado originalmente debido a Lagrange-Laplace de que los semiejes no cambian. Pero hay que hacer 2 aclaraciones: el semieje es constante pero no necesariamente igual al original osculante. En la practica a partir de las condiciones iniciales se podría hacer una integración numérica de las ecuaciones exactas y se determinaría un semieje medio, ese seria el valor correcto del semieje para la teoría secular. La segunda aclaración, el movimiento medio observado sera diferente debido al efecto en la ec. (13).

Esta forma de obtener  $R_{sec}$  es el método de la tijera. Un método mas elaborado consiste en hacer transformaciones canónicas tal que en las nuevas variables desaparezcan las  $\lambda_i$ . Si pensamos en términos del Hamiltoniano tenemos

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - R_{sec} \quad (89)$$

Como  $L$  es constante y  $R_{sec}$  es independiente del tiempo la evolución del asteroide estará contenida en superficies que cumplen

$$R_{sec}(e, i, \varpi, \Omega) = cte \quad (90)$$

Y si el planeta perturbador tiene órbita circular de inclinación cero seguramente  $R$  sera independiente de  $\Omega$  ya que la perturbación del planeta no puede ser sensible al nodo debido a la simetría del problema. Saber que  $R_{sec}$  es constante es importante pues las curvas de nivel de esa superficie nos indican la posible evolución del asteroide y las regiones del espacio  $(e, i, \omega)$  que el asteroide puede recorrer.

Importante: en las perturbaciones seculares el semieje permanece constante pero no porque la perturbación lo obligue a permanecer constante sino mas bien por que lo ignora. Esto significa que si hay algún otro agente perturbador el semieje puede quedar sometido a alguna evolución (típicamente difusión caótica). Diferente es el caso de las resonancias de movimientos medios en donde existe un efecto sobre el semieje que lo hace oscilar en torno a un valor fijo.

**Ejercicio.** Probar que para la  $R_{sec}$  generada por  $J_2$  sobre un satélite en torno a un planeta existe una inclinación para la cual  $\varpi = cte$ , longitud de periastro congelado.

**Ejercicio.** Calcular las variaciones  $d\varpi/dt, dM_r/dt$  que se generan en el movimiento de un satélite con  $i = 0$  debido a la  $R_{sec}$  generada por el achatamiento dado por  $J_2$ .

#### 4.5 Ecuaciones seculares para el conjunto $a, e, i, \Omega, \omega$

La utilización de  $\varpi$  tiene sentido en bajas inclinaciones pues da una idea de la *ubicación espacial* del perihelio, que especialmente interesa en caso de estudiar resonancias seculares por ejemplo. Pero para órbitas de inclinación próxima a 180 la dirección espacial del perihelio esta dada mas bien por  $\varpi^* = \Omega - \omega$  por lo que algunos autores utilizan esta nueva variable para órbitas retrogradadas. Lo cierto es que para órbitas de alta inclinación ni  $\varpi^*$  ni  $\varpi$  dicen nada de la localización del perihelio por lo que para el caso general es conveniente trabajar con el conjunto  $(a, e, i, \Omega, \omega)$ . El juego de ecuaciones para este conjunto es (Brouwer and Clemence, 1961):

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (91)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R_{sec}}{\partial \omega} \quad (92)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R_{sec}}{\partial i} \quad (93)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R_{sec}}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R_{sec}}{\partial i} \quad (94)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R_{sec}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R_{sec}}{\partial \Omega} \quad (95)$$

y se puede obtener de las que ya vimos considerando la relación entre las nuevas y viejas variables. Se arma ló cuando  $e$  o  $i$  son próximas a cero, pero eso se soluciona con cambios de variable adecuados que evitan las indeterminaciones (variables  $h, k, p, q$ ).

**Ejercicio.** Probar que para la  $R_{sec}$  generada por  $J_2$  sobre un satélite en torno a un planeta existe una inclinación crítica  $i = 63.4$  para la cual  $\omega = cte$ , argumento de periaastro congelado.

#### 4.6 Teorías para bajas ( $e, i$ )

Utilizando el desarrollo que se presenta en Murray and Dermott (1999) y especialmente la fabulosa rutina `DisturbingFunction.nb` o usando el paquete `celmech` en Python podemos ver los siguientes casos.

##### 4.6.1 Perturbador externo con $i_p = 0$

En caso de que el planeta perturbador sea exterior con masa  $m$  y semieje  $a_p$  se encuentre en órbita de inclinación cero y si despreciamos términos en  $\alpha = a/a_p$  de orden 4 y superiores, del desarrollo Laplaciano de  $R$  se obtiene:

$$R_{sec} \simeq \frac{k^2m}{a_p} \left[ 1 + \alpha^2 \left( 1/4 + \frac{3}{8}(e^2 + e_p^2) - \frac{3}{2}(\sin \frac{i}{2})^2 \right) - \frac{15}{16}\alpha^3 ee_p \cos(\varpi - \varpi_p) \right] \quad (96)$$

##### 4.6.2 Perturbador interno con $i_p = 0$

En caso de que el planeta perturbador sea interior con masa  $m$  y semieje  $a_p$  se encuentre en órbita de inclinación cero y si despreciamos términos en  $\alpha = a_p/a$  de orden 4 y superior, del desarrollo Laplaciano de  $R$  se obtiene:

$$R_{sec} \simeq \frac{k^2m}{a} \left[ 1 + \alpha^2 \left( 1/4 + \frac{3}{8}(e^2 + e_p^2) - \frac{3}{2}(\sin \frac{i}{2})^2 \right) - \frac{15}{16}\alpha^3 ee_p \cos(\varpi_p - \varpi) \right] \quad (97)$$

Notar el parecido con la anterior pero hay una diferencia interesante: cuando el perturbador es interno aparece un término  $\frac{k^2m}{a}$  mientras que en el caso anterior ese término era constante pues dependía de  $a_p$ . Parece un término inofensivo pues en la teoría secular  $a$  es constante, pero véase que aporta un término importante en la ecuación (13) para  $dM/dt$ , quiere decir que contribuye a afectar el movimiento medio observado. Ver también figura 27. El efecto de un perturbador interno parece ser cualitativamente diferente del efecto de un perturbador externo.

### 4.6.3 Caso secular asteroidal plano

Ver (Murray and Dermott, 1999, pag 254). En este problema usando la expresión (96) la función perturbadora secular queda

$$R_{sec} \simeq Ce^2 + Fee_p \cos(\varpi - \varpi_p) + cte \quad (98)$$

donde

$$C \simeq \frac{k^2 m}{a_p} \frac{3}{8} \alpha^2 \quad (99)$$

$$F \simeq -\frac{k^2 m}{a_p} \frac{15}{16} \alpha^3 \quad (100)$$

Como no aparecen las variables rápidas, el semieje es constante y como el Hamiltoniano también lo es entonces las soluciones verifican  $R_{sec}(e, \varpi) = cte$ . Haciendo curvas de nivel de  $R_{sec}$  tenemos las trayectorias posibles.

Las ecuaciones que dan la evolución temporal de  $e, \varpi$  quedan

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R_{sec}}{\partial \varpi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} Fee_p \sin(\varpi - \varpi_p) \quad (101)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R_{sec}}{\partial e} = 2Ce + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} Fee_p \cos(\varpi - \varpi_p) \quad (102)$$

Se puede ver que las variables  $(e, \varpi)$  están acopladas, varían sincronizadamente. De las ecuaciones podemos tener una idea de la evolución de  $e$  a través de la aproximación  $\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \simeq cte$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} Fee_p \sin(\varpi(t) - \varpi_p) \quad (103)$$

$$\Delta e = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} Fee_p \frac{\cos(\varpi(t) - \varpi_p)}{\dot{\varpi}} \quad (104)$$

Entonces, aproximadamente la excentricidad oscila con amplitud

$$\Delta e \simeq \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} F \frac{e_p}{\dot{\varpi}} \quad (105)$$

y de la otra ecuación vemos que  $\dot{\varpi}$  no es constante sino que tiene una componente  $2Ce$  mas una oscilación. Notar que cuanto mas lentamente varia  $\varpi$  mayor sera el cambio en la excentricidad. Como  $F < 0$  entonces cuando  $\varpi \sim \varpi_p$  la variación  $d\varpi/dt$  es mínima por lo que un asteroide en general pasa mas tiempo con su  $\varpi$  próximo al del planeta. Esto precisamente se da en los asteroides, cuyos perihelios se concentran en torno al perihelio de Júpiter. De la ecuación de la  $e$  se ve que cuando  $\varpi \sim \varpi_p$  la  $e$  es máxima. En la figura 9 se puede apreciar que la población de asteroides concentra sus perihelios en las proximidades de  $\varpi_J \sim 15^\circ$  y que allí las excentricidades son mayores. Podemos chequear esto con  $d\varpi/dt$  calculada numéricamente (ver sección 5) en función de  $\varpi$ . El resultado esta en la figura 10. Si el planeta tiene un  $\varpi_p(t)$  variable entonces en vez de  $\dot{\varpi}$  en (104) aparece como divisor  $(\varpi - \varpi_p)/dt$ . Eso significa que cuando  $\varpi$  y  $\varpi_p$  varían al mismo ritmo  $\Delta e$  diverge. Eso es el caso mas obvio de los que se conoce como **resonancia secular**. Cuidado: no siempre que  $(\varpi - \varpi_p)$  oscila ocurre una resonancia secular, en la figura 11 por ejemplo si el modo libre o propio fuera menor que el forzado  $(\varpi - \varpi_p)$  oscilaría pero no debido a una commensurabilidad de frecuencias. Lo veremos mas adelante. El

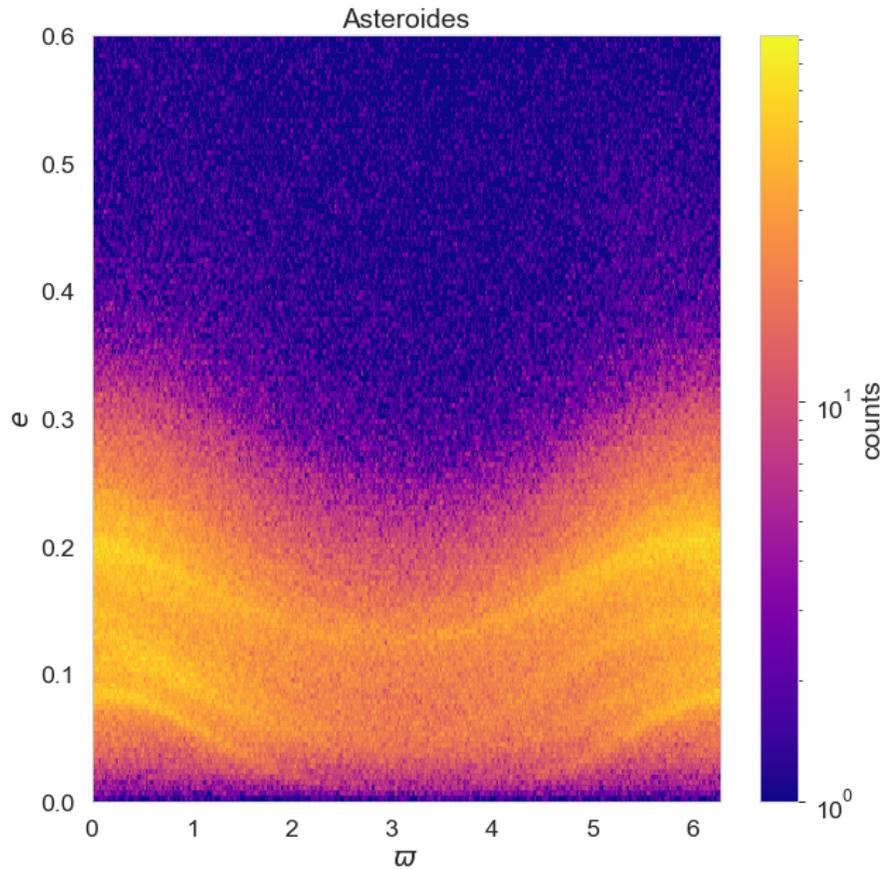


Figure 9: Plot de densidad de los elementos  $(\varpi, e)$  para la población de asteroides ( $\varpi$  en radianes). El perihelio de Júpiter está en  $\varpi_J \sim 15^\circ$ . Los asteroides con  $\varpi \sim \varpi_J$  son más excéntricos. Fuente: Mauro Cabrera.

comportamiento observado en los perihelios de los asteroides tiene su análogo en las longitudes de sus nodos. Asimismo se ha invocado que un planeta 9 generaría estos modos en objetos de la región transNeptuniana generando concentraciones en sus perihelios y nodos (Batygin et al., 2019). La dinámica de los TNO perturbados por un planeta 9 puede estudiarse en primera aproximación con esta  $R_{sec}$ .

#### 4.6.4 Caso secular transNeptuniano plano

En este caso en que el perturbador Neptuno es interior debemos usar la ec. (97) que es casi igual al caso de la  $R$  para un asteroide perturbado por Júpiter pero ahora tenemos el semieje de la partícula en el denominador.

#### 4.6.5 Teoría secular para 2 planetas de bajas $(e, i)$

Seguir Murray and Dermott (1999, cap 7) donde se desarrolla una teoría para planetas con pequeñas  $(e, i)$ . Las ecuaciones para  $(e, \varpi)$  están desacopladas de las de  $(i, \Omega)$ . Aquí se introducen las **frecuencias fundamentales** del sistema  $(g_i, f_i)$ . Hay 2 frecuencias asociadas a los perihelios pero solo una asociada a las inclinaciones, esto es porque dinámicamente solo tiene relevancia la inclinación relativa entre los 2 planetas. Esto significa que el sistema se reduce a tres grados de libertad. Si acaso el cuerpo central tiene achatamiento entonces hay un plano fundamental que sería el ecuatorial del cuerpo central y entonces habría 2 frecuencias asociadas a las inclinaciones (y nodos). Se prueba que las excentricidades de los planetas evolucionan

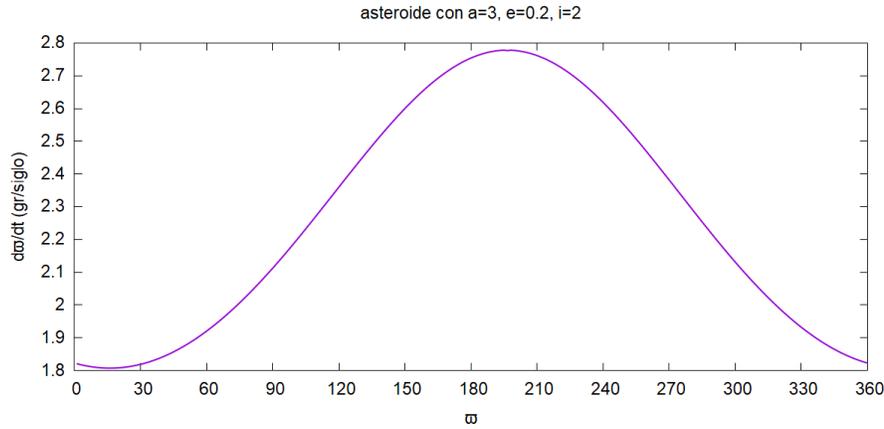


Figure 10:  $d\varpi/dt$  calculada con las ecuaciones planetarias usando  $R_{sec}$  numérica para asteroide con  $a = 3.0$ ,  $e = 0.2$ ,  $i = 2$ . Ver que cuando  $\varpi \sim 15$  grados  $d\varpi/dt$  es mínima.

en forma acoplada entre si y con un única frecuencia que es la diferencia de las 2 frecuencias fundamentales mientras que las inclinaciones también evolucionan acopladas y siguiendo la única frecuencia fundamental. Seguramente es consecuencia de la conservación del momento angular del sistema.

#### 4.6.6 Teoría secular asteroide perturbado por sistema planetario: elementos propios

Seguir Murray and Dermott (1999, cap 7.4).

Al resolver las ecuaciones seculares de un asteroide para el caso  $(e, i)$  pequeñas perturbado por un sistema planetario de evolución conocida de antemano encontramos que la evolución de los elementos orbitales es igual a la suma de dos componentes vectoriales: una **forzada** y otra **libre o propia** (ver fig 11). La forzada varía en función de como evoluciona secularmente (en forma conocida) el sistema perturbador y la propia gira con frecuencia constante (**frecuencias propias** A y B según la notación de MD o también  $g$  y  $f$ ) y tiene modulo constante. Se prueba que cuando el semieje del asteroide se aproxima al de un planeta sus elementos forzados tienden a ser iguales a los elementos del planeta. Por esto los asteroides tienden a tener sus  $(\varpi, \Omega)$  osculantes próximos a los de Júpiter, pues todos tienen una componente forzada similar. La componente propia depende de las condiciones iniciales mientras que la forzada es independiente y esta definida por el sistema planetario. Cada una varía con diferentes frecuencias y cuando la frecuencia propia coincide con alguna de las frecuencias del modo forzado la solución diverge (crecen la  $e$  o la  $i$ ) generando una **resonancia secular**. En esta teoría simplificada las frecuencias propias o libres dependen exclusivamente del semieje orbital de la partícula y se verifica  $A = -B$ , o sea que la componente propia de excentricidad (o en variables  $h, k$ ) rota en sentido contrario que la propia de inclinación (o en variables  $p, q$ ). Pero al considerar asteroides de mayores  $(e, i)$  las frecuencias propias presentan una dependencia  $(a, e, i)$ . La teoría no es trivial si  $(e, i)$  no son pequeñas por lo que se recurre a métodos semianalíticos como veremos. Mientras los osculantes y forzados varían los propios se mantienen constantes por lo que el cálculo de los elementos propios es importante para determinar familias colisionales (**familias de Hirayama**) pues estas conservan elementos propios similares a los del progenitor.

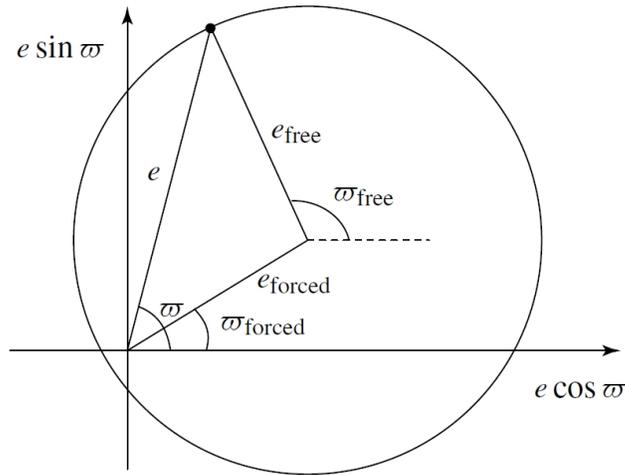


Figure 11: Excentricidad y perihelio osculantes son el resultado de sumar las componentes forzada y libre o propia. Fuente: Murray and Dermott (1999).

#### 4.6.7 Teoría secular de sistema planetario de bajas $(e, i)$

Si consideramos un sistema planetario con bajas  $(e, i)$  que se perturban mutuamente en Murray and Dermott (1999, cap 7.7) se desarrolla una teoría secular para el mismo donde se resuelven simultáneamente las ecuaciones simplificadas para los  $N$  planetas. De esta teoría se deduce la existencia de  $2N$  frecuencias fundamentales pero unicamente es valida para bajas  $(e, i)$  por lo que para casos mas generales hay que recurrir a métodos semianalíticos o teorías sintéticas.

Para el caso de 2 planetas Libert and Henrard (2008) desarrollaron una función perturbadora de mayor orden que permite estudiar  $(e, i)$  no muy altas pero si mas que en el desarrollo clásico.

**Ejercicio.** Para el caso coplanar estimar  $dM/dt$  para una partícula perturbada por a) un planeta circular con órbita interior a la partícula y b) igual al caso anterior pero con el planeta en órbita exterior.

#### 4.7 Resonancias seculares y elementos propios

Dado un sistema de  $N$  cuerpos masivos como un sistema planetario con órbitas referidas a la estrella central quedan definidas al menos  $3N$  frecuencias:  $N$  son altas y corresponden a los movimientos medios, otras  $N$  están asociadas a los movimientos de los  $\varpi_i$  y otras  $N$  están asociadas a los movimientos de los  $\Omega_i$ . Cuando un asteroide o partícula tiene una frecuencia propia que coincide o guarda una relación sencilla con alguna frecuencia fundamental ocurre una resonancia secular y su evolución orbital sera radicalmente diferente a la de una partícula próxima pero con diferente frecuencia propia. Generalmente están asociados grandes cambios en  $(e, i)$ . Para bajas  $(e, i)$  existen teorías analíticas para localizar las resonancias seculares como ya vimos o como se resume en Malhotra (1998, cap 4). Esas resonancias seculares estan localizadas para  $a$  fijos. Pero para asteroides con moderadas o altas  $(e, i)$  las teorías basadas en desarrollos analíticos de la función perturbadora a primer orden fallan por lo cual se han desarrollado métodos analíticos de mayor orden (Milani and Knezevic, 1990) y métodos semi-analíticos (Williams and Faulkner, 1981). Se puede ver una muy buena síntesis en Knezevic et al. (2002). En estas teorías mas precisas se muestra que las resonancias seculares están en

	Lagrange–Laplace (arcsec yr <sup>-1</sup> )	Laskar et al. (2004b) (arcsec yr <sup>-1</sup> )	Period (yr)
$g_1$	5.462	5.59	$2.318 \times 10^5$
$g_2$	7.347	7.452	$1.739 \times 10^5$
$g_3$	17.332	17.368	$7.462 \times 10^4$
$g_4$	18.006	17.916	$7.234 \times 10^4$
$g_5$	3.733	4.257	$3.044 \times 10^5$
$g_6$	22.512	28.245	$4.588 \times 10^4$
$g_7$	2.707	3.088	$4.197 \times 10^5$
$g_8$	0.635	0.673	$1.926 \times 10^6$
$f_1$	-5.201	-5.59	$2.318 \times 10^5$
$f_2$	-6.571	-7.05	$1.838 \times 10^5$
$f_3$	-18.747	-18.850	$6.875 \times 10^4$
$f_4$	-17.637	-17.755	$7.299 \times 10^4$
$f_5$	0	0	—
$f_6$	-25.989	-26.348	$4.919 \times 10^4$
$f_7$	-2.908	-2.993	$4.331 \times 10^5$
$f_8$	-0.679	-0.692	$1.874 \times 10^6$

Figure 12: Frecuencias fundamentales del sistema solar obtenidas por la teoría simplificada de Lagrange-Laplace y por integraciones numéricas (Laskar). Fuente Tremaine (2023).

superficies  $(a, e, i)$  y no en lugares fijos de  $a$ , ver figura 13. Las teorías permiten la determinación precisa de las resonancias y también de los elementos propios de los asteroides. El tema se trata también en Morbidelli (2002a, cap 8.4). Las resonancias seculares también pueden ser generadas por combinaciones de varias frecuencias fundamentales dando lugar a resonancias seculares de diverso orden (**no lineales**).

Uno se ve tentado a pensar que una resonancia secular de perihelio ocurre porque el perihelio del asteroide se mueve igual que el de un planeta. Para el caso plano retrogrado, para que tenga sentido la localización del periastro en el plano de referencia se suele utilizar la variable  $\varpi^* = \omega - \Omega$  en vez de  $\varpi = \omega + \Omega$  pero surge la duda si pueden existir resonancias seculares de perihelio en altas inclinaciones ya que como indicador de la ubicación del perihelio esta variable pierde sentido para inclinaciones altas y físicamente en el espacio los perihelios realizarían un movimiento complicado. Que sentido físico tendrían las resonancias seculares en órbitas de alta inclinación en donde los perihelios se mueven en planos bien diferentes? En realidad las resonancias ocurren por conmensurabilidades de frecuencias, a veces las podemos identificar claramente con movimientos de perihelio o nodo y otras veces no. En el sistema solar la resonancia con  $g_i$  (perihelios) se la nota como  $\nu_i$  y la resonancia con  $f_i$  (nodos) como  $\nu_{1i}$  donde  $i$  designa al planeta asociado a la frecuencia.

#### 4.8 Revisión de $R_{sec}$ y aproximación secular de cuadrupolo y octupolo

La función perturbadora resulto ser un complicado desarrollo en los elementos orbitales de los cuerpos que intervienen. En realidad la  $R$  se escribe de forma bastante compacta en función de  $f$  en vez de  $\lambda$  pero las ecuaciones planetarias de Lagrange o las canónicas se vuelven imposibles de integrar analíticamente. Es decir, cuando queremos integrar  $da/dt$  por ejemplo, lo que esta a la derecha es imposible de integrar analíticamente si no lo expreso como un desarrollo en serie. Al expresarlo como un desarrollo en función de  $\lambda$  las integrales son triviales pues el tiempo esta linealmente involucrado con las  $\lambda$  que están dentro de cosenos. Pero si me interesa la evolución secular voy a promediar en los ángulos rápidos, entonces

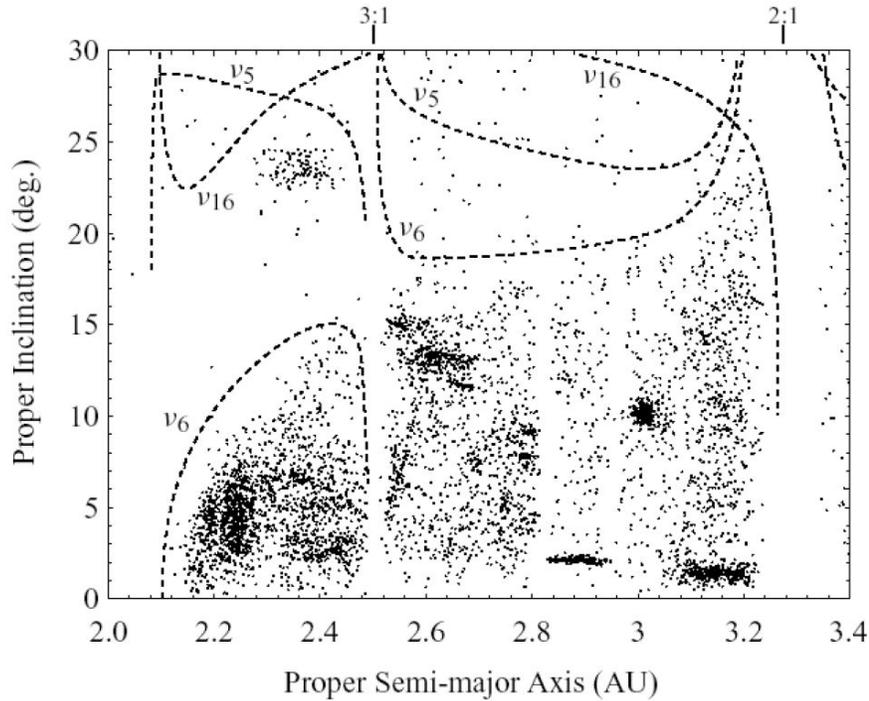


Figure 13: Localización de las resonancias seculares en el Sistema Solar en el plano  $(a, i)$  para una dada  $e = 0.1$ . Para bajas inclinaciones las resonancias seculares están en valores fijos de  $a$  pero al aumentar la  $i$  nos apartamos de la teoría vista en 4.6.6 y obtenemos  $a(e, i)$ . Los asteroides se encuentran en regiones delimitadas por las superficies de las resonancias seculares en el espacio  $(a, e, i)$ . Fuente: Murray and Dermott (1999).

$$R_{sec} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{n}{h} \int_0^{2\pi} R(f) r^2 df \quad (106)$$

o sea no necesito expresar  $R(\lambda)$ , lo puedo hacer conociendo  $R(f)$  y esto quiere decir que no necesito hacer todos los desarrollos que hicimos antes, solo los necesarios como para que la integral sea manejable. La integral en realidad es doble pues hay que integrar en  $(f, f')$ .

Se puede ver (Murray and Dermott, 1999) que lo relevante en la expresión 16 comienza con  $l = 2$  y se puede escribir como

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{1}{a_2} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^l \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^{l+1} P_l(\cos \psi) \quad (107)$$

donde  $\psi$  es el ángulo entre los 2 vectores espaciales que junto a  $r_1, r_2$  se pone en función de las anomalías verdaderas, no de las medias, por lo que no es necesario hacer expansiones en  $(e, i)$ . Cuando  $\alpha = a_1/a_2 \ll 1$  (se le llama caso jerárquico) se suele adoptar la aproximación mas simple hasta  $l = 2$  o la mas precisa hasta  $l = 3$ . Luego se promedia en los ángulos de variación rápida obteniendo las aproximaciones seculares de **cuadrupolo** y **octupolo** respectivamente. Esto es lo que popularizo Kozai (1962) para un planeta circular lo que le permitió estudiar la dinámica secular de asteroides de altas  $(e, i)$  y que pasamos a ver a continuación.

#### 4.9 Partícula de arbitrarias $(e, i)$ con perturbadores circulares coplanares: *vZLK*

En base a lo que vimos en la sección 4.8, sería posible obtener  $R_{sec}$  valida para altas  $(e, i)$  pero solo suponiendo gran diferencia de semiejes entre partícula y perturbador. Y si el perturbador esta en órbita circular de  $i = 0$  entra en escena el mecanismo o efecto o resonancia Lidov-Kozai.

El libro de Shevchenko (2017) esta enteramente dedicado a este tema. En el extenso review de Ito and Ohtsuka (2019) se explica ademas que von Zeipel en 1910 ya había considerado este problema, por lo cual desde hace poco se suele hablar del **mecanismo ZLK**.

#### 4.9.1 ZLK interno

En un congreso en París en 1962 sobre satélites artificiales un soviético presento un trabajo de Lidov (quien no asistió) sobre la dinámica de un objeto geocentrico perturbado por la Luna. Kozai estaba presente y extendió el método a los asteroides perturbados por Júpiter. Sólo recientemente quedo establecido que von Zeipel también había analizado este problema en 1910. En el caso en que  $a \ll a_p$  se puede truncar la formula (6.21) de Murray and Dermott (1999) quedándonos con los términos de hasta orden  $(a/a_p)^2$  y luego promediando en los ángulos rápidos. La  $R_{sec}$  obtenida analíticamente se puede expresar como (ver capitulo 3 de Shevchenko (2017) o también Kokubo (2003), Ito and Ohtsuka (2019), Kozai (1962))

$$R_{sec} \simeq k^2 \frac{m_p a^2}{8a_p^3} \left[ 2 + 3e^2 - 3(1 - e^2 + 5e^2 \sin^2 \omega) \sin^2 i \right] \quad (108)$$

Esta expresión simplificada tiene cierto parecido con 96 pero es valida para cualquier  $(e, i)$  pues no fue necesario expresarla en expansiones de esos elementos. Pero, como aquella, implica un desarrollo en  $a/a_p$  despreciando los términos de orden  $(a/a_p)^3$  y superiores por lo que esa relación tiene que mantenerse  $\ll 1$ . Como ya dijimos se conoce como función perturbadora de cuadrupolo, y si ademas consideramos los términos en  $(a/a_p)^3$  tendremos el modelo de octupolo.

Por ser una expresión independiente de  $\lambda$  el semieje es constante. Entonces no solo el Hamiltoniano es constante sino también  $R_{sec}$ . Por ser independiente de  $\Omega$  su conjugada  $H = L\sqrt{1 - e^2} \cos i$ , que es la componente z del momento angular, también es constante. La condición  $\sqrt{1 - e^2} \cos i = cte$  impone que  $(e, i)$  están acopladas (figura 14) y que la evolución se realiza sobre curvas  $(e, i)$  que están acotadas. En particular como el mínimo valor de  $\cos i$  ocurre para  $e = 0$  entonces hay una **máxima inclinación** posible  $i_{max}(e = 0)$ . Podemos poner  $i$  en función de  $e$  por ejemplo y tendremos que las soluciones son curvas de nivel

$$R_{sec}(\omega, e) = cte \quad (109)$$

(figura 15) y con las ecuaciones planetarias de Lagrange o las canónicas puedo obtener la solución temporal. Los limites entre los que varían  $(\omega, e, i)$  estarán definidos por la curva de nivel correspondiente al objeto de estudio y las evoluciones dentro de esas curvas deben verificar  $H = cte$ .

Los puntos de equilibrio se definen como

$$d\omega/dt = de/dt = 0 \quad (110)$$

y esto conduce a que hay regiones en  $(\omega, e)$  donde aparecen oscilaciones en torno a ciertos valores de  $\omega$ , que en este caso son 90 y 270. Entonces dado que esta evolución secular genera oscilaciones en  $\omega$  se la llamo resonancia de Kozai. Hay una commensurabilidad entre la frecuencia de  $\varpi$  y  $\Omega$  del asteroide pero no con un planeta en particular por lo cual no seria una resonancia como las seculares o las de movimientos medios y en las soluciones no aparece un divisor tendiendo a cero. El propio Kozai me lo dijo "they call it resonance but it is not a resonance!". Sin embargo existe una topologia como la del péndulo con una región de oscilación y otra de circulación, lo particular de este caso es que el punto de equilibrio inestable esta en el origen, es decir cuando

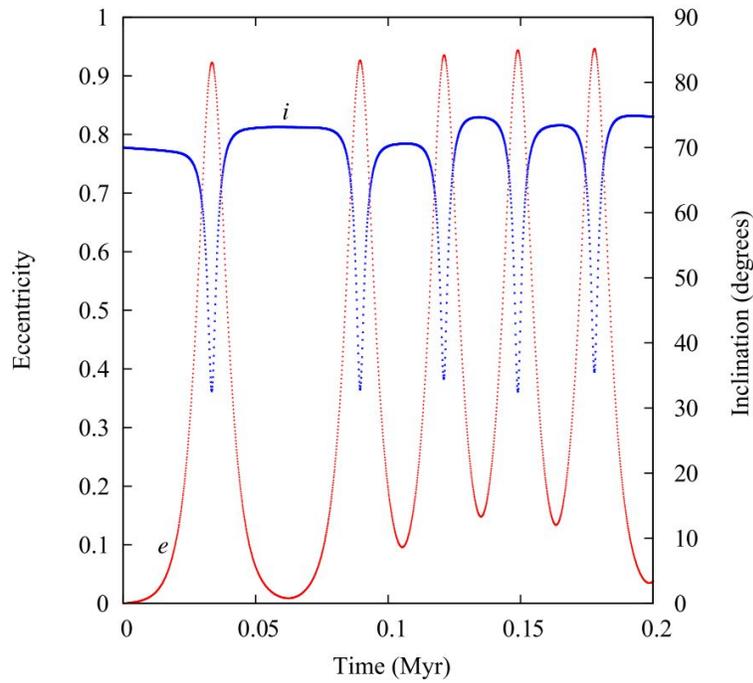


Figure 14: Mecanismo ZLK actuando sobre asteroide perturbado por los cuatro planetas gigantes. Integración numérica de las ecuaciones exactas de movimiento con los planetas gigantes en sus órbitas reales. Ver acople  $(e, i)$ . Fuente: Gallardo (2017).

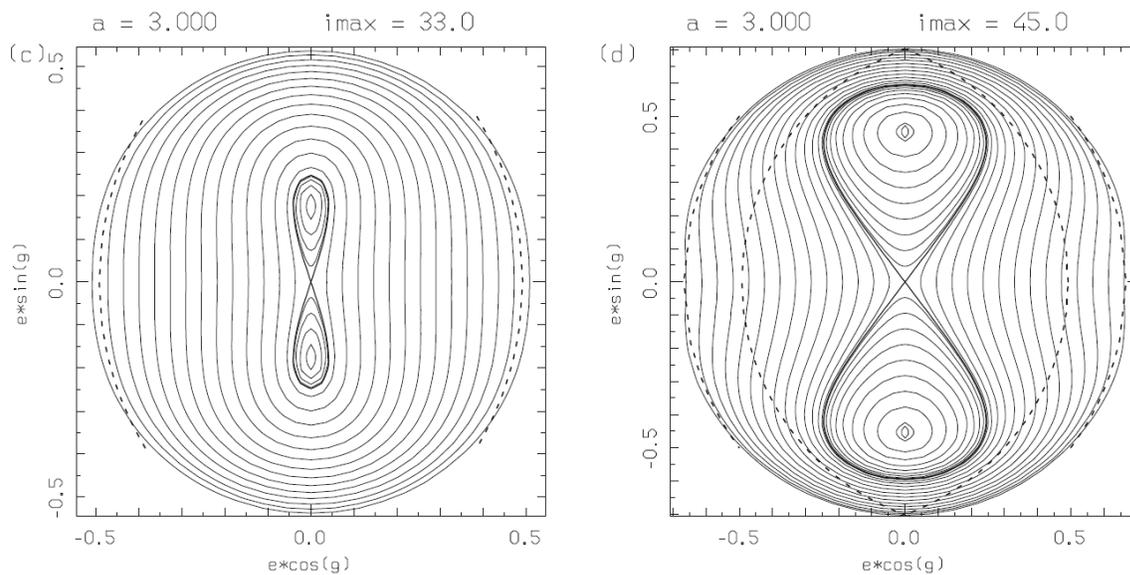


Figure 15: Diagrama polar de curvas de nivel de  $R_{sec}(\omega, e)$  constante para un asteroide de  $a = 3$  ua para dos valores diferentes de la variable  $H = L\sqrt{1 - e^2} \cos i$  correspondiente a los casos con  $i_{max} = 33$  y  $i_{max} = 45$ . La partícula está obligada a evolucionar sobre alguna de esas curvas. Notar que el punto de equilibrio inestable está en el origen. Para  $i_{max}$  menores a cierto límite no hay puntos de equilibrio excepto en el origen. Fuente: Morbidelli (2002a).

$e = 0$  lo cual hace que órbitas circulares puedan convertirse en caóticas si la inclinación es superior al valor crítico (ver ejercicio abajo). Ver discusión en Shevchenko (2017, 4.6).

**Ejercicio. Inclinación crítica.** Probar que para la  $R_{sec}$  dada por (108) los puntos de equilibrio existen solo cuando la inclinación es mayor a cierto valor crítico dado por  $\sin i^2 = 2/5$

**Ejercicio.** Probar que los puntos de equilibrio están en  $\omega = 90, 270$  y  $e^2 = 1 - h\sqrt{5/3}$  donde  $h = H/L$ .

#### 4.9.2 ZLK externo

Se puede encontrar una expresión análoga de  $R_{sec}$  para el caso  $a/a_p > 1$  aplicable a la región TN por ejemplo, ver Vinson and Chiang (2018) quienes llaman esta dinámica como **Kozai inverso**. En Ito and Ohtsuka (2019) se puede ver la deducción de  $R_{sec}$  tanto para el caso interno como externo. Una aproximación diferente se encuentra en Gallardo et al. (2012) donde la expresión analítica de obtiene suponiendo planetas perturbadores cuya masa se distribuye en anillos circulares, estos anillos tienen momentos de inercia que se suman y se agregan al potencial del cuerpo central. Esta técnica también suele usarse para considerar la perturbación generada por un satélite planetario como si fuera generada por un efecto de achatamiento artificial del planeta central y es la usada en Batygin and Brown (2016) para considerar la perturbación de los planetas gigantes en TNOs muy alejados. La  $R_{sec}$  generada por un planeta interior en órbita circular es según Gallardo et al. (2012)

$$R_{sec} = \frac{k^2 m_p a_p^2}{8a^3 (1 - e^2)^{3/2}} (2 - 3 \sin^2 i + X/2) \quad (111)$$

con

$$X = \frac{9a_p^2 ((2 + 3e^2) (9 + 20 \cos 2i + 35 \cos 4i) + 40e^2 (5 + 7 \cos 2i) \cos 2\omega \sin^2 i)}{512a^2 (1 - e^2)^2} \quad (112)$$

en donde además la masa central se incrementa en  $m_p$  y el procedimiento consiste en considerar que los planetas perturbadores son anillos de materia con los momento de inercia correspondientes a anillos que se suman al potencial central del Sol, luego se usa una formula tipo MacCullagh pero de un orden mayor (Brouwer and Clemence, 1961). Notar el parecido con la  $R_{sec}$  generada por achatamiento. Además tiene cierto parecido con 97 pero es válida para  $(e, i)$  arbitrarios.

En todos estos casos es posible considerar más de un planeta perturbador en órbita circular, cada planeta aporta una  $R_{sec}$  que se suma a las demás. Los desarrollos analíticos son aproximados y si bien son válidos para cualquier  $(e, i)$  hay limitaciones en cuanto al semieje de la partícula, que no puede acercarse a los perturbadores. Mas adelante veremos que los métodos semianalíticos son muy convenientes pues no tienen limitaciones en los semiejes. Finalmente, es interesante notar que la  $R_{sec}$  dependiendo de si el planeta perturbador es interno o externo tiene efectos bien diferentes.

Véase que tanto en ZLK interno como externo los potenciales de cuadrupolo dan dinámicas sencillas mientras que los de mayor orden dan dinámicas más complejas. O sea, perturbadores

alejados generan dinámicas sencillas pero si son próximos habrá que usar mayores ordenes generando dinámicas mas complejas. Tanto en el externo como el interno los términos en  $\alpha$  (cociente de semiejes) impares son nulos en la  $R_{sec}$  cuando el perturbador esta en órbita circular y en este sentido la  $R_{sec}$  es muy parecida a la producida por el achatamiento de un planeta con simetría norte/sur. Sin embargo, notar que mientras en el caso interno (asteroidal) el modelo hasta  $\alpha^2$  contiene  $\omega$ , en el caso externo (transneptuniano) se requiere un desarrollo hasta  $\alpha^4$  para que aparezca  $\omega$  en  $R_{sec}$ . Finalmente notar que el mecanismo ZLK es altamente dependiente de la evolución de  $\omega$  y este puede ser afectado por efectos relativistas, en efecto en algunos casos estos efectos modifican sustancialmente el mecanismo ZLK (Tremaine, 2023, cap 5).

**Ejercicio.** Probar que la función perturbadora secular  $R_{sec}$  de un planeta de masa  $m_p$ , semieje  $a_p$  y  $e = i = 0$  sobre una partícula de  $a \gg a_p$  y demás elementos arbitrarios se puede aproximar a

$$R_{sec} \simeq \frac{k^2 m_p a_p^2}{8a^3 (1 - e^2)^{3/2}} (2 - 3 \sin^2 i)$$

donde además la masa central pasa a ser  $M_\odot + m_p$ . Nota: una forma de probarlo es suponer que el planeta es sustituido por un anillo circular de masa  $m_p$  y radio  $a_p$  y usando la formula de MacCullagh y los momentos de inercia del anillo. Compare esta expresión con la deducida para el achatamiento (81). También aquí podemos definir una inclinación crítica.

**Ejercicio.** Usando el resultado anterior probar que el efecto perturbador de un planeta en con  $e = i = 0$  sobre una partícula lejana se puede modelar sustituyendo el achatamiento del Sol (dado por  $J_2$ ) por un achatamiento

$$J'_2 = J_2 + \frac{1}{2} \frac{m_p a_p^2}{M_\odot R_\odot^2} \quad (113)$$

**Ejercicio.** Para una  $R_{sec}$  dada por ec. (111) generada por Neptuno con  $X = 0$  indague la posibilidad de que para alguna inclinación se cumpla  $d\varpi/dt = 0$ .

#### 4.9.3 ZLK excéntrico

También hay aproximaciones analíticas de tipo X-polo (para casos jerárquicos) para el caso en que el planeta perturbador sea excéntrico (**ZLK excéntrico**, ver Naoz (2016)). En este caso la dinámica generada es bien compleja porque ahora el efecto secular del planeta no es comparable al de un anillo circular. El nodo del asteroide aparecerá como variable en la  $R_{sec}$  y el momento conjugado  $H$  ya no sera constante lo cual hace que la correlación  $(e, i)$  esté distorsionada y, lo mas importante, que pueden existir los flideos, es decir, pasaje de directos a retrógrados y viceversa lo cual estaba prohibido en el ZLK circular.

#### 4.10 Teoría secular general para partícula perturbada por un planeta excéntrico

En términos de las variables canónicas de Poincaré  $(\lambda, \gamma, z, \Lambda, \Gamma, Z) = (\lambda, -\varpi, -\Omega, L, L - G, G - H)$  el Hamiltoniano 40 de un asteroide evolucionando bajo la perturbación de un único

planeta excéntrico queda

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2\Lambda^2} - R(\Lambda, \Gamma, Z, \lambda, \gamma, z, \lambda_p) \quad (114)$$

donde  $\lambda_p$  es la longitud media del planeta en su órbita fija. Asumiendo que no hay conmensurabilidad de movimiento medio entre el asteroide y el planeta y excluyendo situaciones de encuentros cercanos, podemos realizar un método de promediado eliminando las variables rápidas  $\lambda, \lambda_p$  y obtenemos el nuevo Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2\Lambda^2} - R_s(\Lambda, \Gamma, Z, \gamma, z) \quad (115)$$

donde  $R_s$  es la función perturbadora secular obtenida por un doble promediado numérico en  $\lambda$  y  $\lambda_p$ . Para simplificar, usamos la misma nomenclatura para las nuevas variables, pero después del promediado, las nuevas variables son variables medias en el sentido de que ahora no tienen variaciones de período corto y estrictamente no son las mismas mostradas en la Ec. 114. Como  $\mathcal{H}$  ahora no depende de  $\lambda$ , tenemos que  $\Lambda$  es constante, lo que significa que  $a$  es constante. Entonces, las ecuaciones canónicas para el movimiento secular del asteroide se convierten en:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\partial R_s}{\partial \gamma}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial R_s}{\partial \Gamma} \quad (116)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial R_s}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial R_s}{\partial Z} \quad (117)$$

Este es un sistema con 2 grados de libertad, que si admite una solución regular, debe contener 2 frecuencias propias:  $g$  asociada a  $(e, \varpi)$  y  $f$  asociada a  $(i, \Omega)$ . Estas frecuencias y algunas de sus combinaciones aparecerán en la evolución temporal de los elementos orbitales de la partícula  $(e, i, \varpi, \Omega)$ . Como en el caso mas general no contamos con una formulación analítica para  $R_s$ , Gallardo and Cabral (2025) hicieron un estudio determinando numéricamente esas frecuencias propias de un asteroide perturbado por un Jupiter de  $e_p = 0.4$  y encontraron que las 2 disminuyen para inclinaciones crecientes (ver figura 16) hasta que para cierta inclinación se obtiene  $g \sim 0$  que coincide con evolución caótica. Para inclinaciones mayores ambas frecuencias coinciden por lo que tenemos variaciones acopladas de excentricidad e inclinación que es la característica del mecanismo de ZLK.

#### 4.11 Teoría secular general para 2 planetas

Este problema general es mas complejo que el asteroidal pues las incógnitas son el doble que antes. en vez de plantear el Hamiltoniano y la función perturbadora para el asteroide debemos hacerlo para el sistema. Como vimos en la secciones 3.7 y 3.7.1 el Hamiltoniano es la suma de parte central kepleriana dependiente de los semiejes mas las perturbaciones. Como se trata de teoría secular los semiejes son constantes por lo que los términos keplerianos pueden ignorarse en las ecuaciones y solo interviene la  $R_{sec}$ .

##### 4.11.1 Caso plano

Si tenemos una estrella y 2 planetas coplanares, para estudiar la evolución secular consideramos el Hamiltoniano secular que dependerá de los semiejes de los planetas que serán constantes y de la  $R_{sec}$  que en consecuencia también sera constante. Pero vimos en la sección 3.7 que es necesario pasar a las variables de Poincare o de Jacobi para que sean canónicas.

En las variables canónicas el Hamiltoniano para el caso plano se expresa como  $\mathcal{H}(G_1, G_2, \varpi_1, \varpi_2)$  y es fácil ver que en realidad depende de los perihelios solo a través de  $\Delta\varpi$ . Es fácil verlo pues

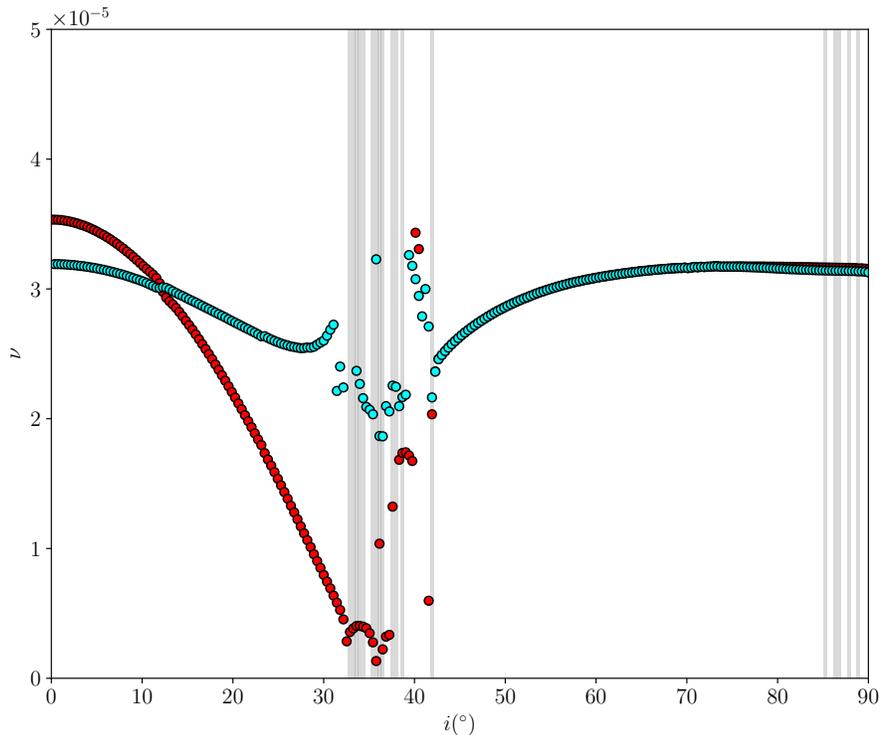


Figure 16: Frecuencias propias asociadas con  $(k, h)$  en rojo y  $(q, p)$  en azul para diferentes inclinaciones iniciales de la partícula con  $a = 2$  ua y  $e = 0.4$  iniciales perturbada por un planeta tipo Jupiter con  $a_p = 5.2$  ua y  $e_p = 0.4$ . El fondo gris indica cambios importantes en el semieje mayor que están relacionados con la evolución inestable no secular. Fuente Gallardo and Cabral (2025).

la física del problema no debería depender de las direcciones espaciales absolutas sino de las relativas. Lo podemos demostrar haciendo una transformación canónica a las nuevas variables  $((G_1 - G_2)/2, (G_1 + G_2)/2, (\varpi_1 - \varpi_2), (\varpi_1 + \varpi_2))$  y resulta que en el nuevo Hamiltoniano solo aparece  $\Delta\varpi$  y no la suma por lo que  $(G_1 + G_2) = cte$  (que es igual al momento angular total del sistema) y esto significa que puedo poner  $e_2$  en función de  $e_1$  por ejemplo y terminamos obteniendo  $\mathcal{H}(e_1, \Delta\varpi)$ , ver también Beaugé et al. (2012, cap 4 y 5). Esto es un Hamiltoniano de un grado de libertad, con una sola frecuencia fundamental, por lo que siempre es integrable, no existe caos en la teoría secular y su estudio es muy sencillo. Con curvas de nivel podemos estudiar los movimientos posibles, con puntos de equilibrio, separatrices, etc, ver figura 17. El Hamiltoniano (o  $R_{sec}$ ) se puede calcular **numéricamente** para no tener las limitaciones de los desarrollos como veremos en el próximo capítulo y así fue como lo hicieron por primera vez Michtchenko and Malhotra (2004) en un trabajo fundamental de la dinámica secular planetaria. El hecho de que  $(G_1 + G_2) = cte$  implica que  $L_1\sqrt{(1 - e_1^2)} + L_2\sqrt{(1 - e_2^2)} = cte$  y por lo tanto cuando un planeta aumenta su excentricidad el otro la disminuye. Esto lo podíamos haber deducido simplemente considerando que el momento angular del sistema debe conservarse. En Lee and Peale (2003) se muestra muy bien como resolver el problema para el caso plano analíticamente.

#### 4.11.2 Caso tridimensional

Si bien los modelos de cuadrupolo y octupolo son de fácil manejo, a veces un desarrollo clásico de alto orden (8 o mas) brinda resultados mas precisos, ver por ejemplo Rodríguez and Gallardo (2005); Libert and Henrard (2008). La complejidad del desarrollo analítico de  $R_{sec}$

en el caso espacial válida para  $(e, i)$  arbitrarias llevó a Michtchenko et al. (2006b) a desarrollar una teoría 3D basada en el calculo numérico de  $R_{sec}$ . Los detalles de este calculo los veremos en el capitulo siguiente pero aquí podemos ver el sistema de variables y ecuaciones involucradas. Usando las variables de Delaunay

$$(M, \omega, \Omega, L = \beta\sqrt{\mu a}, G = L\sqrt{1 - e^2}, H = G \cos i) \quad (118)$$

el Hamiltoniano en el sistema de Poincare (democratico heliocentrico) es

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{2L_2^2} - R(L_i, G_i, H_i, M_i, \omega_i, \Omega_i) \quad (119)$$

siendo  $R$  la función perturbadora total,  $\mu_i = k^2(m_0 + m_i)$ ,  $\beta_i = m_0 m_i / (m_0 + m_i)$  y  $k$  la constante de Gauss. Eliminando las variables rapidas  $M_i$  obtenemos el Hamiltoniano secular

$$\mathcal{H}_s = -\frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{2L_2^2} - R_s(L_i, G_i, H_i, \omega_i, \Omega_i) \quad (120)$$

donde  $R_s$  es la funcion perturbadora secular (notar que es proporcional a  $m_1 m_2$ ). Como  $\mathcal{H}_s$  no depende de las  $M_i$  tendremos que las nuevas  $L_i$  son constantes, como los semiejes, asi que la parte relevantes de  $\mathcal{H}_s$  es solamente  $R_s$ . Hagamos la siguiente transformación canónica  $(\omega_i, G_i, \Omega_i, H_i) \rightarrow (\omega_i, G_i, \Omega_1, (H_1 + H_2), (\Omega_2 - \Omega_1), H_2)$ . Resulta que  $R_s$  debe ser independiente de  $\Omega_1$  pues si cambio el origen desde donde se mide las ecuaciones no pueden cambiar (invariancia acimutal). Asi que su momento conjugado  $(H_1 + H_2)$  es constante y por definición igual a la componente z del momento angular total del sistema (ignorando rotación estelar). Las ecuaciones quedan

$$\frac{dG_1}{dt} = \frac{\partial R_s}{\partial \omega_1}, \quad \frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{\partial R_s}{\partial G_1} \quad (121)$$

$$\frac{dG_2}{dt} = \frac{\partial R_s}{\partial \omega_2}, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{\partial R_s}{\partial G_2} \quad (122)$$

$$\frac{dJ}{dt} = 0, \quad \frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{\partial R_s}{\partial J} \quad (123)$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{\partial R_s}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial R_s}{\partial H_2} \quad (124)$$

donde hemos definido  $J = (H_1 + H_2)$  y  $\theta = (\Omega_2 - \Omega_1) = \Delta\Omega$ . Como  $\Omega_1$  no esta presente la tercer ecuacion puede ignorarse. Nótese que el momento angular total del sistema debe ser constante y si tomamos su dirección como eje z de nuestro sistema de referencia (lo que equivale a tomar el plano invariable de Laplace como plano de referencia, ver 4.12) entonces el vector de momento angular para cada planeta debe estar opuesto con respecto al eje z y esto resulta en  $\Delta\Omega = 180^\circ$  siempre, por lo que los nodos ascendentes siempre estarán opuestos y evolucionarán con la misma evolución temporal. Como los nodos siempre están opuestos, solo uno de ellos es relevante para la dinámica. Con  $d\theta/dt = 0$  la última ecuación también se vuelve irrelevante, pero el hecho de que  $R_s$  sea independiente de  $H_2$  no implica que  $H_2$  sea constante. Entonces, el sistema resultante puede reducirse a dos grados de libertad (Michtchenko et al., 2006b), pero si analizamos la evolución temporal de los elementos orbitales referidos a un sistema inercial encontraremos no dos sino tres frecuencias fundamentales, suponiendo un movimiento regular. Estas tres frecuencias fundamentales son  $g_1$  y  $g_2$ , ambas asociadas a las longitudes de los

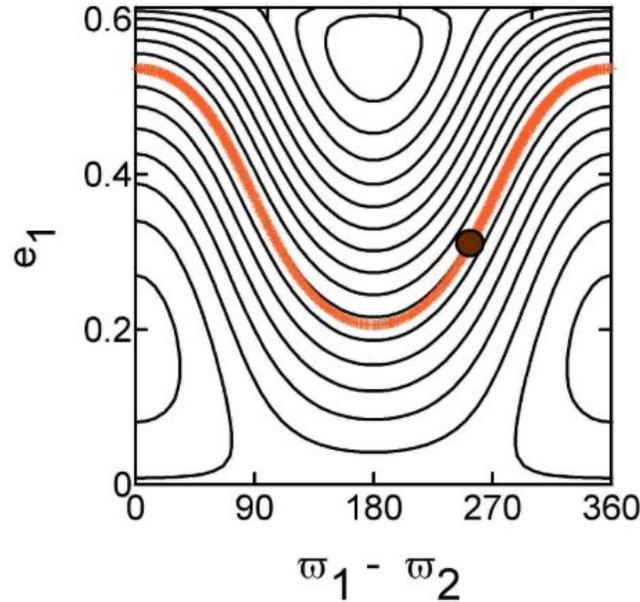


Figure 17: Curvas de nivel del Hamiltoniano secular típicas para un sistema de dos planetas excéntricos coplanares. Existen modos de oscilación mutua de los perihelios en 0 y 180 y modos de circulación. Referencia: Beaugé et al. (2012).

perihelios y excentricidades, y otra,  $f$ , asociada a la línea común de nodos e inclinaciones. Estas frecuencias y algunas de sus combinaciones aparecerán en la evolución temporal de los elementos orbitales de cada planeta. Una deducción analítica de estas frecuencias puede encontrarse en Libert (2007) siempre que se disponga de una expresión analítica para el Hamiltoniano.

Gallardo and Suescun (2025) hicieron un estudio determinando numéricamente esas frecuencias fundamentales y encontraron que las 3 disminuyen para inclinaciones relativas crecientes hasta que para cierta inclinación crítica ocurre una resonancia secular  $g_1 = g_2$  y para una inclinación algo mayor ocurre el mecanismo de ZLK cuando ocurre  $g_2 = f$ . El cuadro de la figura 18 resume los resultados.

La tabla 1 presenta un resumen de la metodología a aplicar según el caso. En el próximo capítulo veremos cómo es el cálculo de la  $R_s$  numérica.

	bajas y medias ( $e, i$ )	arbitrarias ( $e, i$ )
$\alpha \ll 1$	clásico, bajo orden en $\alpha$	X-polo, ZLK
para todo $\alpha$	clásico, coef. de Laplace	$R_s$ numérica

Table 1: Modelos aplicables para estrella mas 2 planetas  $m_1, m_2$  con  $\alpha = a_1/a_2$ . El cálculo de  $R$  secular numérica puede hacerse en cualquier caso.

#### 4.12 Plano invariable y AMD

En un sistema planetario tomando como origen el baricentro del sistema el momento angular total del sistema es

$$\mathbf{L} = \sum_{j=0}^N m_j \mathbf{r}_j \times \dot{\mathbf{r}}_j \quad (125)$$

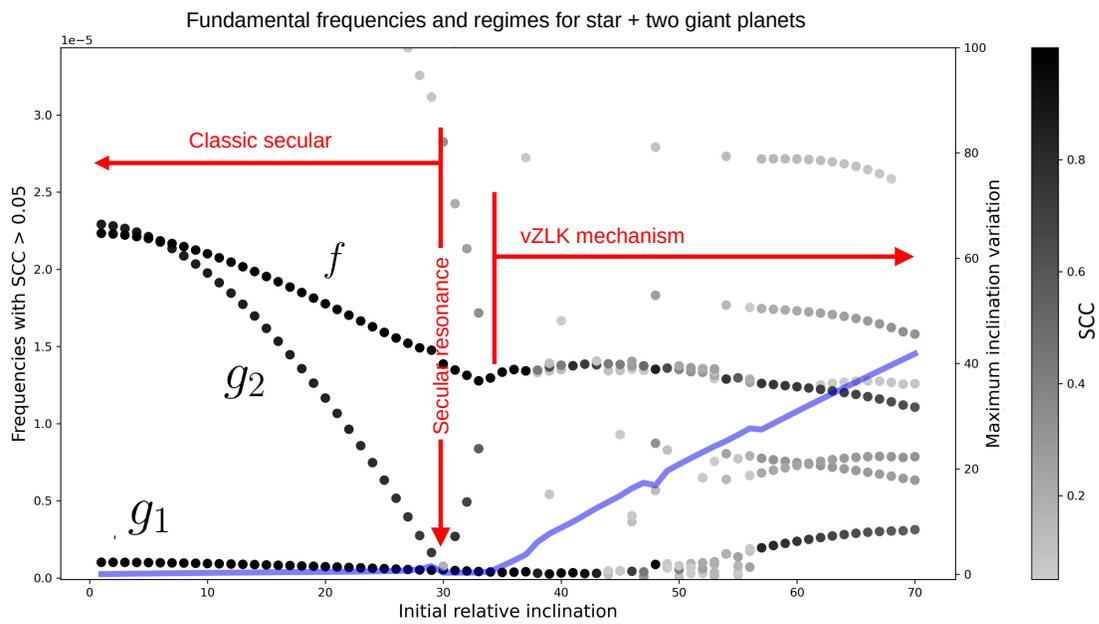


Figure 18: Comportamiento de las frecuencias fundamentales según la inclinación mutua en un sistema de dos planetas gigantes. Referencia: Gallardo and Suescun (2025).

incluyendo al Sol en su movimiento en torno al baricentro. Pero en un sistema centrado en la estrella esta formula no es valida. El plano perpendicular a  $\mathbf{L}$  es el **plano invariable de Laplace**. En el caso del sistema solar al cambiar de plano de referencia de Ecliptica a plano invariable tenemos

$$(a, e, i, \omega, \Omega, M) \longrightarrow (a, e, I, w, N, M) \quad (126)$$

Si  $(i_p, \Omega_p)$  son los elementos del plano invariable respecto a la ecliptica se forma un triangulo esférico de elementos en sentido antihorario  $(N, i_p, \Omega - \Omega_p, \pi - i, \omega - w, I)$ . Las incógnitas  $(I, N, w)$  se obtienen de las formulas

$$\cos I = \cos i_p \cos i + \sin i_p \sin i \cos(\Omega - \Omega_p) \quad (127)$$

$$\frac{\sin N}{\sin i} = \frac{\sin(\Omega - \Omega_p)}{\sin I} = \frac{\sin(\omega - w)}{\sin i_p} \quad (128)$$

$$\cos i = \cos i_p \cos I - \sin i_p \sin I \cos N \quad (129)$$

$$\cos(\omega - w) = \cos N \cos(\Omega - \Omega_p) + \sin N \sin(\Omega - \Omega_p) \cos i_p \quad (130)$$

Para el sistema solar el plano invariable respecto al plano de la eclíptica queda definido por:  $(i_p, \Omega_p) = (1^\circ.58, 107^\circ)$ .

Todos los planetas y partículas con evolución cuasi-regular describen en el plano ( $k = e \cos \varpi, h = e \sin \varpi$ ) trayectorias centradas en  $(0, 0)$  que son la suma de parte forzada y parte libre. Pero si no se usa el plano invariable como plano de referencia, las trayectorias en el plano ( $q = i \cos \Omega, p = i \sin \Omega$ ) estarán centradas en  $(q_{pi}, p_{pi})$ . Para estudios dinámicos es conveniente usar el plano de Laplace como referencia en vez de la Ecliptica. Y los elementos referidos al plano invariable son los que habría que usar en el calculo de ángulos críticos en el caso de resonancias. Las evoluciones seculares hacen que los planos precesen en torno del vector  $\mathbf{L}$  manteniendo su inclinación con variaciones mínimas respecto al plano invariable. Si se toma un plano arbitrario como referencia se observarían variaciones en  $(i, \Omega)$  que no tienen sentido físico. Los 4 planetas gigantes por ejemplo muestran una oscilación de sus nodos respecto a la ecliptica y sin embargo en el espacio sus orbitas no oscilan sino que precesan, ver figura 19.

Si bien la expresión (125) es estrictamente valida cuando se toma el baricentro como origen, cuando se consideran los elementos heliocéntricos medios de los planetas a partir de una teoría secular es posible escribir el momento angular  $\bar{\mathbf{L}} = (L_x, L_y, L_z)$  como la sumatoria de los momentos del problema de 2 cuerpos planeta-Sol:

$$L_x = \sum_{j=1}^N \frac{m_j M_\star}{m_j + M_\star} \sqrt{k^2(M_\star + m_j) \bar{a}_j (1 - \bar{e}_j^2)} \sin \bar{i}_j \sin \bar{\Omega}_j \quad (131)$$

$$L_y = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j M_\star}{m_j + M_\star} \sqrt{k^2(M_\star + m_j) \bar{a}_j (1 - \bar{e}_j^2)} \sin \bar{i}_j \cos \bar{\Omega}_j \quad (132)$$

$$L_z = \sum_{j=1}^N \frac{m_j M_\star}{m_j + M_\star} \sqrt{k^2(M_\star + m_j) \bar{a}_j (1 - \bar{e}_j^2)} \cos \bar{i}_j \quad (133)$$

donde cada planeta contribuye en cada componente y el Sol no se incluye por ser ahora el origen. El **Déficit de Momento Angular** (AMD) se define como (Laskar, 1997) :

$$AMD = \sum_{j=1}^N \frac{m_j M_\star}{m_j + M_\star} \sqrt{k^2(M_\star + m_j) \bar{a}_j} \left[ 1 - \sqrt{(1 - \bar{e}_j^2)} \cos \bar{i}_j \right] \quad (134)$$

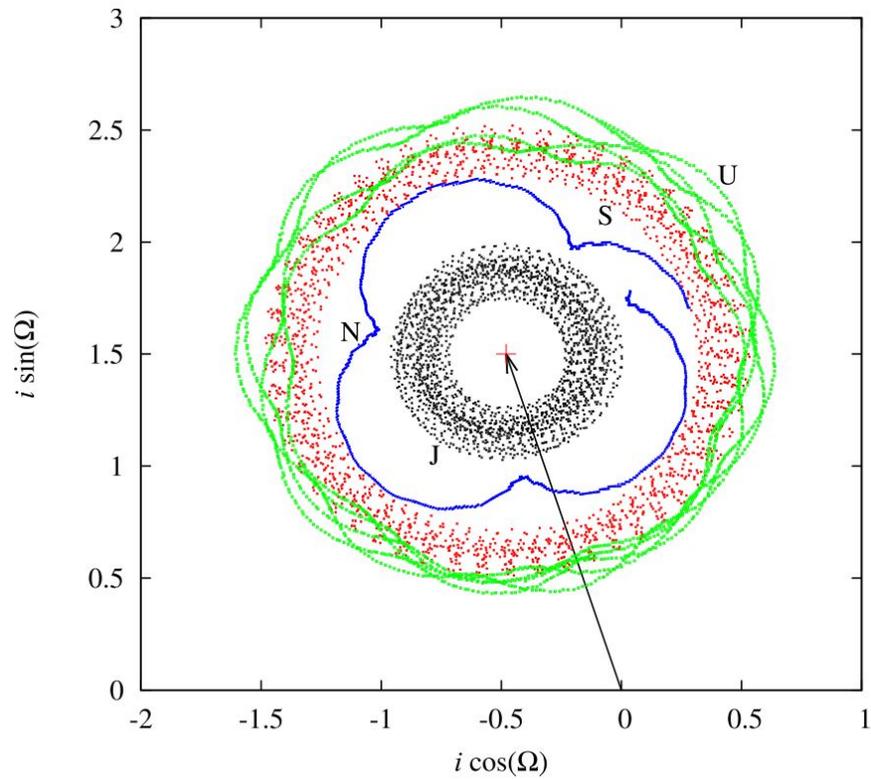


Figure 19: Evolución de los versores momento angular o inclinaciones y nodos de los 4 planetas gigantes en el sistema eclíptico. Por haber adoptado un plano diferente al plano invariable los nodos no circulan, sino que todos oscilan entre 45 y 150 grados aproximadamente. Fuente: Gallardo (2017).

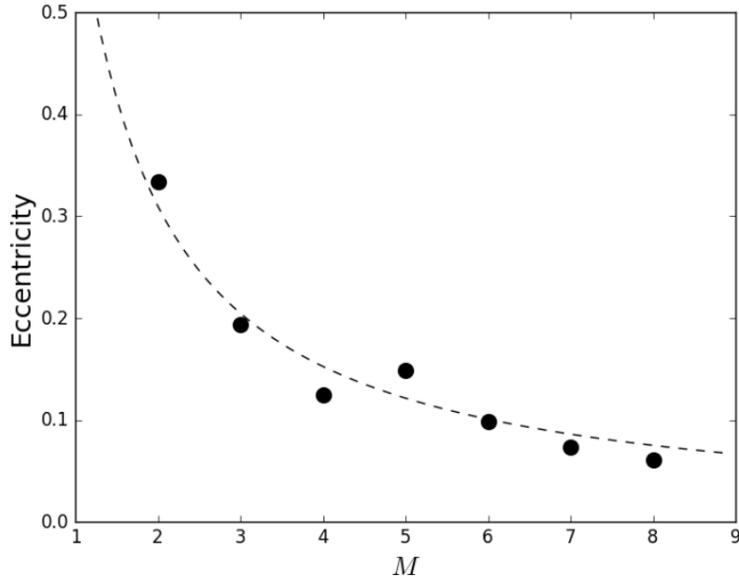


Figure 20: Excentricidad orbital media en sistemas planetarios en función del numero de planetas (multiplicidad  $M$ ). Fuente: Turrini et al. (2020).

indica el apartamiento del sistema planetario de un sistema coplanar y de órbitas circulares y debería ser constante a pesar de las variaciones seculares que puedan ocurrir en los elementos orbitales de los planetas. Es importante tener presente que para el calculo del AMD las inclinaciones  $i_j$  se refieren a inclinaciones respecto al plano invariante del sistema (perpendicular al vector  $L$ ). El AMD es un indicador de estabilidad para los sistemas planetarios pues si es cero las órbitas no pueden variar en nada pero si es grande alguna puede variar mucho y desestabilizar todo el sistema (Turrini et al., 2020). Esto se refleja en que sistemas con pocos planetas pueden tener órbitas excéntricas pero cuando hay muchos las excentricidades deben ser bajas, ver figura 20. En Tamayo et al. (2020) se presenta una discusión de diferentes indicadores de estabilidad para sistemas planetarios compactos.

### 4.13 Dinámica de satélites

Existe un libro reciente sobre este tema que merece ser revisado: Emelyanov (2020).

#### 4.13.1 Radio crítico y plano de Laplace

Un satélite natural típico tiene una dinámica dominada por el achatamiento planetario (dominado por  $J_2$  y tal vez  $J_4$ ) y la perturbación del Sol dada por la ec. (15). En estos casos, considerando un sistema planetocentrico, la relación  $a_{sat}/a_{\odot}$  es tan pequeña que perfectamente se puede utilizar el modelo de cuadrupolo (el ZLK mas elemental) para el efecto solar. El desarrollo del modelo puede verse en Nesvorný et al. (2003); Lemos, Pablo (2018). Ambos efectos (achatamiento y Sol) contribuyen a la precesion de su nodo ( $d\Omega/dt < 0$ ). Pero geometricamente podríamos ver dos movimientos oscilatorios de su momento angular orbital superpuestos y en torno de 2 direcciones diferentes: la dirección del eje de rotación (o eje principal) del planeta y la dirección perpendicular al plano orbital del planeta (el plano del Sol). La composición de estos dos movimientos se realiza en torno a una dirección cuyo plano perpendicular es el **plano de Laplace** para el satélite. Este plano coincide con el ecuador planetario cuando el satélite es dominado por el achatamiento y coincide con el plano del Sol cuando es dominado

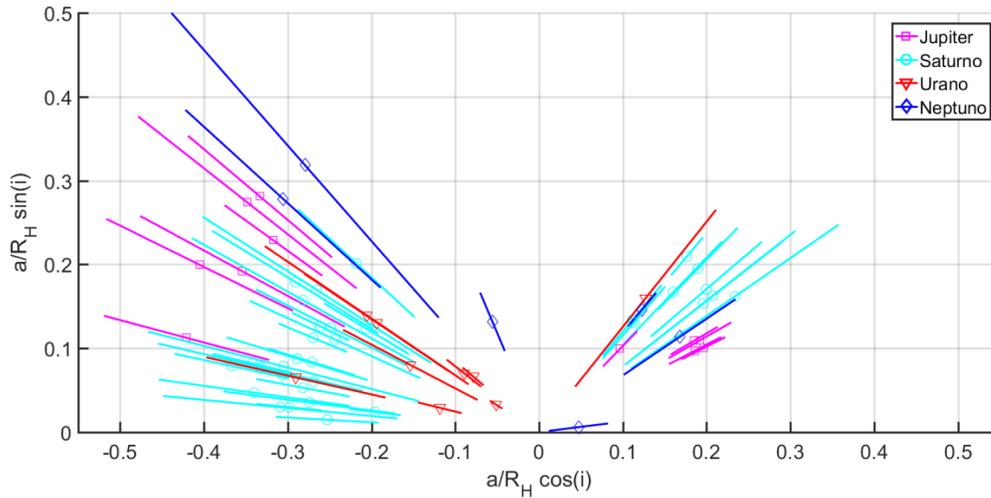


Figure 21: Satélites irregulares de los planetas gigantes en función de inclinación orbital respecto a la eclíptica y la variación de distancia al planeta. Las líneas indican variación de distancia al planeta y están en unidades de radios de Hill. Fuente: Lemos, Pablo (2018).

por la perturbación solar. La distancia límite al planeta que separa ambos efectos se conoce como **radio crítico de Laplace** y es posible encontrar una expresión válida asumiendo que la excentricidad del satélite es despreciable:

$$r_L^5 \simeq J_2 R_p^2 a_p^3 m_p / M_\odot \quad (e \sim 0) \quad (135)$$

Un estudio profundo de este tema se encuentra en Tremaine et al. (2009) y en Tremaine (2023, cap 5). Siempre  $r_L$  es menor que el radio de Hill de lo contrario el satélite escaparía. A veces se usa  $r_L$  como límite entre los **satélites regulares** (más internos y dominados por el achatamiento) y los **irregulares** (más externos y sometidos a la perturbación solar). Los irregulares (ver figura 21) tienen órbitas excéntricas e inclinadas debido a la perturbación del Sol y a su origen por captura. La ausencia de irregulares en órbitas polares justamente se atribuye al efecto ZLK debido al Sol.

#### 4.13.2 Resonancia de eveccion

Un caso interesante de evolución satelital secular es la **resonancia de eveccion**, cuando el periodo orbital del planeta es conmensurable con el periodo de circulación del perihelio del satélite (Frouard et al., 2010), es decir la perturbación solar es conmensurable con la evolución secular orbital del satélite. Esto genera una resonancia similar a las resonancias seculares con grandes variaciones orbitales. Presumiblemente podría haber también conmensurabilidades con el periodo de circulación del nodo. En la figura 21 se muestran los satélites irregulares de los planetas gigantes donde se aprecia la falta de satélites con órbitas polares y el exceso de retrógrados. Lo primero se atribuye a un efecto ZLK debido al Sol que aumenta sus excentricidades provocando colisiones o eyección por alcanzar límites de la esfera de Hill y lo segundo a una perturbación sistemática de la resonancia de eveccion que afecta a fundamentalmente a los directos (Nesvorný et al., 2003).

**Ejercicio.** A partir de  $R_{sec}$  debida al Sol y  $R_{sec}$  debida al achatamiento calcular  $d\Omega/dt$  debido a ambos efectos, igualarlos y demostrar (135).

**Ejercicio.** Estudiar en el caso de la Luna si se encuentra dentro o fuera del radio crítico de Laplace.

**Ejercicio.** Considerando  $R_{sec}$  debida al Sol y despreciando achatamiento planetario calcular el semieje que debería tener un satélite de Saturno para entrar en resonancia de eveccion con su perihelio o con su nodo. Asumir que el satélite tiene  $e = 0.1$  y la inclinación respecto al plano del Sol es  $i = 10$ .

#### Clases en video:

- Clase 09: <https://youtu.be/swjBbYGVkjQ>
- Clase 10: [https://youtu.be/tIpJnm6\\_8BY](https://youtu.be/tIpJnm6_8BY)
- Clase 11: <https://youtu.be/aSlr3pKX0pA>
- Clase 12: <https://youtu.be/41o2CFc9PSg>
- Clase 13: [https://youtu.be/9J3FiAGU\\_JI](https://youtu.be/9J3FiAGU_JI)
- Clase 14: <https://youtu.be/NoJ3o4rA0y8>

## 5 Teoría secular semianalítica

### 5.1 Algoritmo de calculo numérico de $R_{sec}$ y sus derivadas

Hemos visto que las  $R_{sec}$  obtenidas analíticamente tienen limitaciones a veces en  $(e, i)$  o a veces en la relación de semiejes del perturbador y perturbado que no debe ser próxima a 1. Siempre es posible calcular numéricamente  $R_{sec}$  con la doble integral (83) (o simple integral en el caso de achatamiento ec. 17). Se trata de tomar una grilla en  $(\lambda, \lambda_p)$ , evaluar  $R$  instantánea y sumar todo y dividir por el numero de evaluaciones. Por cada integral doble lo que calculamos es un valor de  $R_{sec}$  para los valores dados de los elementos orbitales. Notar que en el caso de evaluar la integral doble (83) por interacción de dos cuerpos en órbitas arbitrarias la parte indirecta (el segundo termino en ec. 14) se anula por lo que no es necesario computarlo cuando se calculan perturbaciones seculares (no así en caso de resonancias de movimientos medios). Dividiendo la integral en  $N$  partes el computo numerico considerando todas las posiciones relativas asteroide-planeta seria

$$R_{sec} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R dM dM_p = \frac{1}{4\pi^2} \sum_1^N \sum_1^N R_i \frac{2\pi}{N} \frac{2\pi}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_1^N \sum_1^N R_i \quad (136)$$

Esa  $R_{sec}(a, e, i, \omega, \Omega)$  representa el valor medio de la  $R$  y es equivalente a suponer que el perturbador y el perturbado no son objetos puntuales sino elipses materiales, mas densas en el afelio y menos densas en perihelio. El calculo analítico del efecto de estos anillos se remonta a Gauss, ver Murray and Dermott (1999, cap 7.6) o la monumental obra de Hagihara (1972, 8.19) y pueden encontrarse varios trabajos actuales tratando este tema (Touma et al., 2009). Como la evolución es secular tenemos que el sistema evoluciona en una superficie  $R_{sec} = cte$ . Si el sistema tiene pocos grados de libertad podremos hacer curvas de nivel y estudiar la topologia de las trayectorias en el espacio de fase encontrando separatrices y puntos de equilibrio, pero si tiene mas de dos grados de libertad el estudio se vuelve mas complejo. Notar que por la forma de calcular  $R_{sec}$  se pierde la informacion del sentido en el que se desplazan los cuerpos en sus orbitas por lo cual se obtiene  $R_{sec}(i, \Omega) = R_{sec}(180 - i, \Omega + 180)$ .

En la figura 22 se muestra la  $R_{sec}$  generada por cada planeta del Sistema Solar calculada numéricamente para una partícula de elementos definidos y variando  $a$ . Ver por ejemplo que para un cuerpo como la Tierra la perturbaciones seculares ordenadas son las de Júpiter, Saturno, Venus, Urano, Neptuno, Marte y finalmente Mercurio comparable a la de Marte. Para un asteroide las de Marte y Mercurio son despreciables. Para un transneptuniano las de Júpiter y Saturno son mas importantes que las de Urano y Neptuno que a su vez son muy similares. Y en este caso las de Venus y Tierra si bien son un orden de magnitud menor podrían tener algún efecto. Y ver como la función cambia de comportamiento entre una posición interna al perturbador y externa. Esto es debido a que cuando el perturbado es interno la variacion de la distancia con el perturbador no es tan pronunciada, en cambio cuando es externo hay grandes variaciones en la distancia y por lo tanto en su atracción mutua.

Sin embargo el valor de  $R_{sec}$  no define la evolución de los elementos orbitales sino que quien determina la evolución son las derivadas parciales de  $R_{sec}$ . Variando cada uno de los elementos orbitales puedo calcular numéricamente las derivadas parciales de  $R_{sec}$  como

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{R(e + \Delta e) - R(e)}{\Delta e} \quad (137)$$

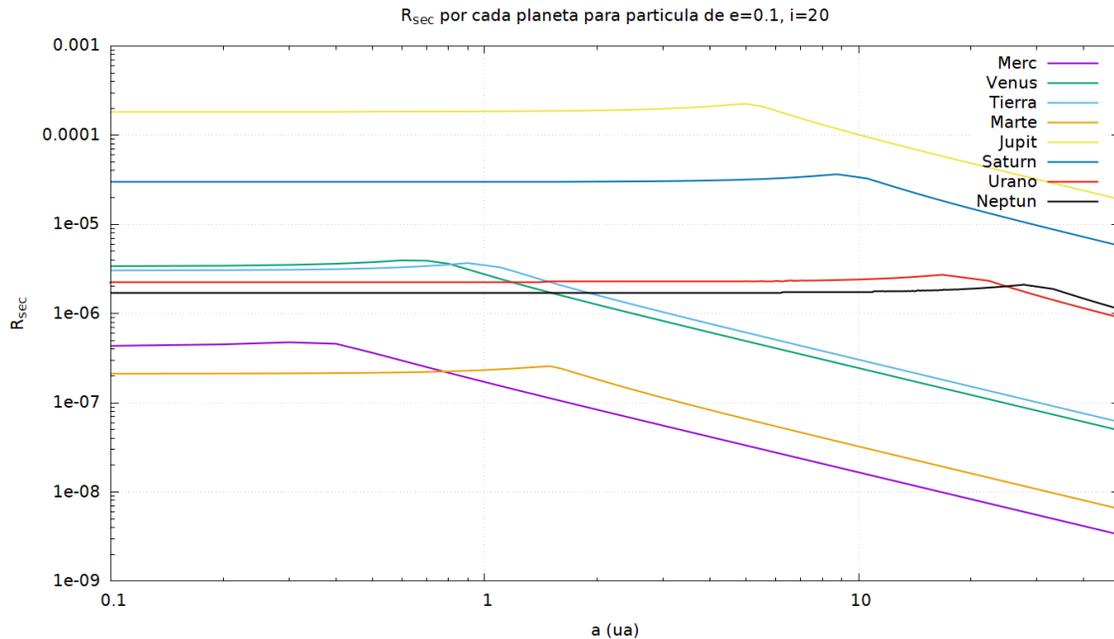


Figure 22:  $R_{sec}(a, e = 0.1, i = 20, \varpi = 0, \Omega = 0)$  numérica generada por cada uno de los 8 planetas en función de  $a$ . Júpiter es quien mas aporta a  $R_{sec}$  a lo largo de todo el sistema, sigue Saturno. Urano mas que Neptuno excepto en la región TN. Mercurio y Marte son los menos relevantes. Para otro juego de elementos orbitales las  $R_{sec}$  serán diferentes, sin embargo se cumple  $R_{sec}(i, \Omega) = R_{sec}(180 - i, \Omega + 180)$ .

y de esa forma obtener las derivadas de los elementos orbitales dadas por las ecuaciones planetarias seculares. En la figura 23 se muestran las  $\partial R_{sec}/\partial e$  correspondientes a la misma figura, también calculadas numéricamente. Vemos que la contribución de Venus o la Tierra es mas importante que la de Júpiter para  $a < 1$  a pesar de que Júpiter contribuye con una  $R_{sec}$  varios ordenes mas grande. No interesa entonces el valor absoluto de  $R_{sec}$  sino sus derivadas. Ver también como en las proximidades del planeta perturbador las derivadas son negativas. En la región de los asteroides los principales perturbadores son Júpiter y Saturno.

Notar que en un paso mas podemos obtener la evolución orbital. Para esto, una vez calculadas las derivadas parciales en cierto instante calculamos las derivadas de los elementos mediante las ecuaciones de Lagrange y luego calculamos por ejemplo

$$\Delta e = \frac{de}{dt} \Delta t \quad (138)$$

donde el paso  $\Delta t$  puede ser del orden de varias decenas o hasta centenas de revoluciones orbitales. Con los nuevos elementos orbitales recalculo  $R_{sec}$  que se actualiza en cada paso que se avanza en la evolución orbital.

Hicimos un codigo `Rsecderiv.f` que calcula las derivadas de los elementos orbitales perturbados por un sistema de planetas y con este código podemos ver como estas derivadas dependen de los elementos orbitales. Por ejemplo podemos ver como son las variaciones en  $(e, i, \Omega, \varpi)$  en función de la inclinación y de la excentricidad sin preocuparnos por limitaciones en desarrollos analíticos de  $R_{sec}$ . En la figura 24 mostramos el efecto en  $d\varpi/dt$  que cada planeta ejerce sobre una partícula para diferentes semiejes. Vemos que para un asteroide el efecto de Marte solo es superior al de Mercurio; Venus y Tierra tienen un efecto mas importante. Para un TNO el efecto de Neptuno es el mas importante y le siguen los otros 3 gigantes con efectos parecidos, y de esta gráfica surge que a nadie se le puede ocurrir incluir el efecto de los terrestres en

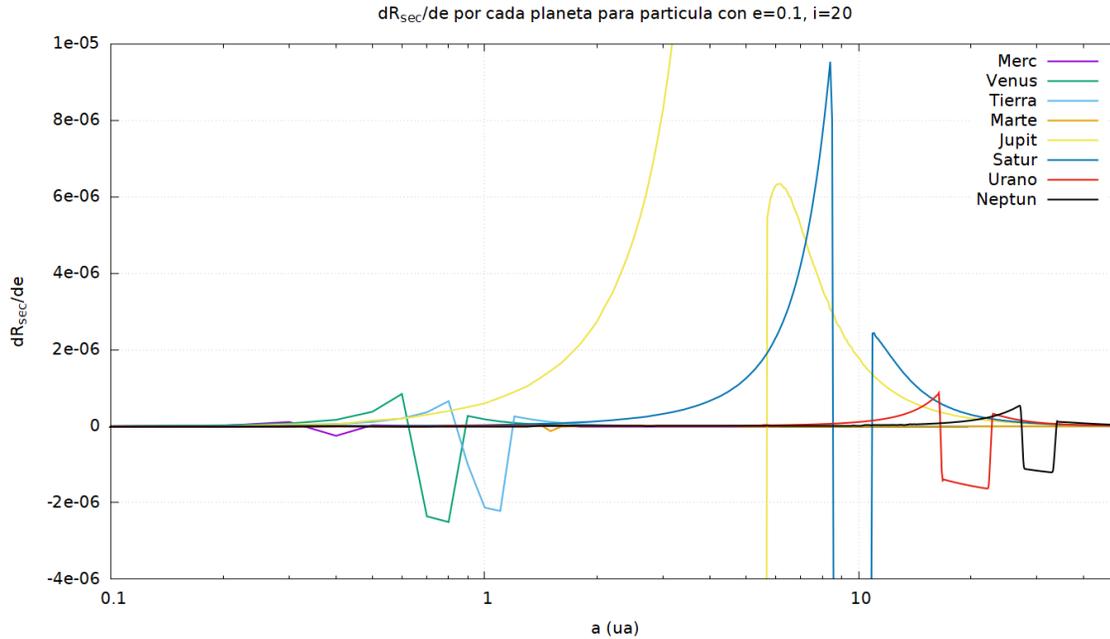


Figure 23:  $\partial R_{sec}/\partial e$  numérica generada por cada uno de los 8 planetas en función de  $a$  para el caso de la figura anterior. Es claro que aquí ya Júpiter no domina en todo el sistema. Exótico comportamiento con cambios abruptos de signo en las proximidades de los planetas.

la dinámica de los TNOs. Entonces, una cosa es  $R_{sec}$ , otra sus derivadas parciales y otra la derivada de los elementos orbitales que es en definitiva lo que interesa.

A efectos de ver diferencias entre directos y retrógrados ponemos los resultados en la figura 25 que muestra las derivadas de los 4 elementos orbitales para una partícula de  $a = 3$  ua y  $e = 0.1$  para todo el rango de inclinaciones y en la figura 26 ponemos el resultado de una integración numérica de las ecuaciones exactas para el caso particular de partícula con  $i = 160$ . El acuerdo es muy bueno entre el resultado semianalítico y la integración numérica. Esto nos dice que la  $R_{sec}$  numérica puede ser válida para estudiar evoluciones seculares para cualquier conjunto de elementos orbitales. Pero no puede haber intersección de órbitas ni encuentros próximos ni nada que genere una perturbación instantánea muy grande. Veremos esto mas adelante en 5.6.

Lo que describimos es un método semianalítico pues utiliza la teoría de las ecuaciones planetarias de Lagrange pero con la función perturbadora calculada numéricamente. La ventaja de este método es que no se necesitan expansiones en serie para  $R$  y por lo tanto calculamos los valores exactos de  $R_{sec}$  sin limitaciones en  $(a, e, i)$ . Podríamos integrar directamente las ecuaciones de movimiento exactas (de Newton) con un integrador y obtener la evolución exacta pero no podríamos saber si esa evolución es secular o debida a términos no seculares. Al integrar las ecuaciones exactas obtendremos pequeñas oscilaciones extras debido a que no estamos obteniendo la evolución de los elementos medios sino los instantáneos. Es muy útil cuando lo que se busca es obtener tasas de variación de los elementos orbitales pues en una integración numérica exacta esas variaciones están enmascaradas por oscilaciones de corto periodo.

Las soluciones obtenidas usando  $R_{sec}$  numérica coinciden con las obtenidas por los métodos analíticos de la teoría de perturbaciones hasta primer orden en las masas de los perturbadores. No son exactamente iguales pues en el método numérico del calculo instantáneo de  $R_{sec}$  dada por la ec. (136) se asume que las órbitas permanecen fijas, sin perturbarse mutuamente, mientras

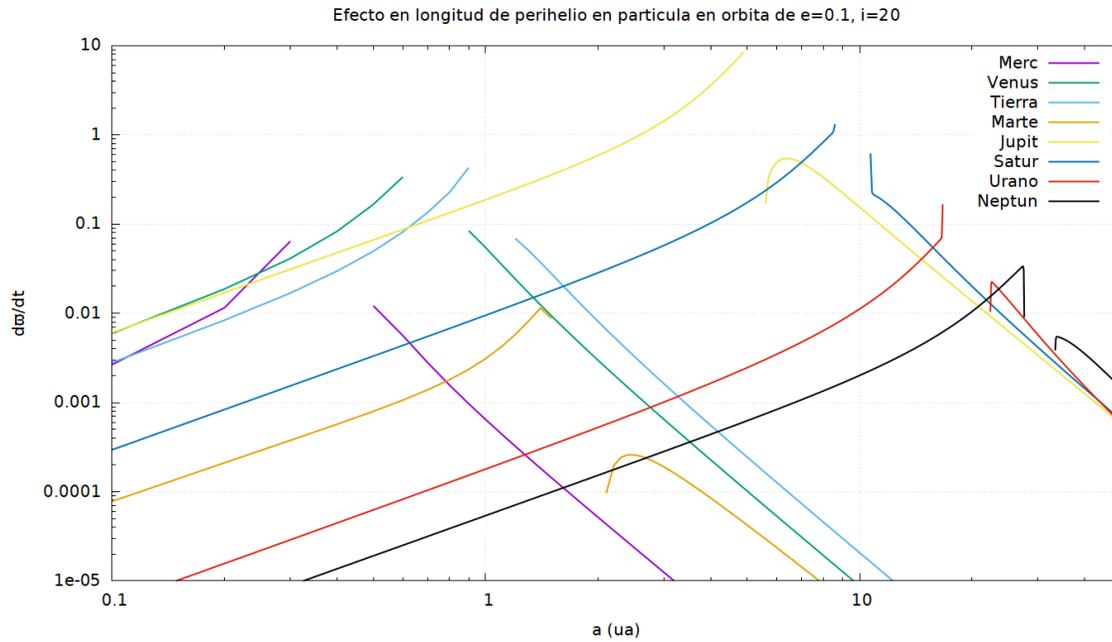


Figure 24:  $d\varpi/dt$  a partir de la  $R_{sec}$  numérica generada por cada uno de los 8 planetas en función de  $a$  para el caso de la figura anterior.

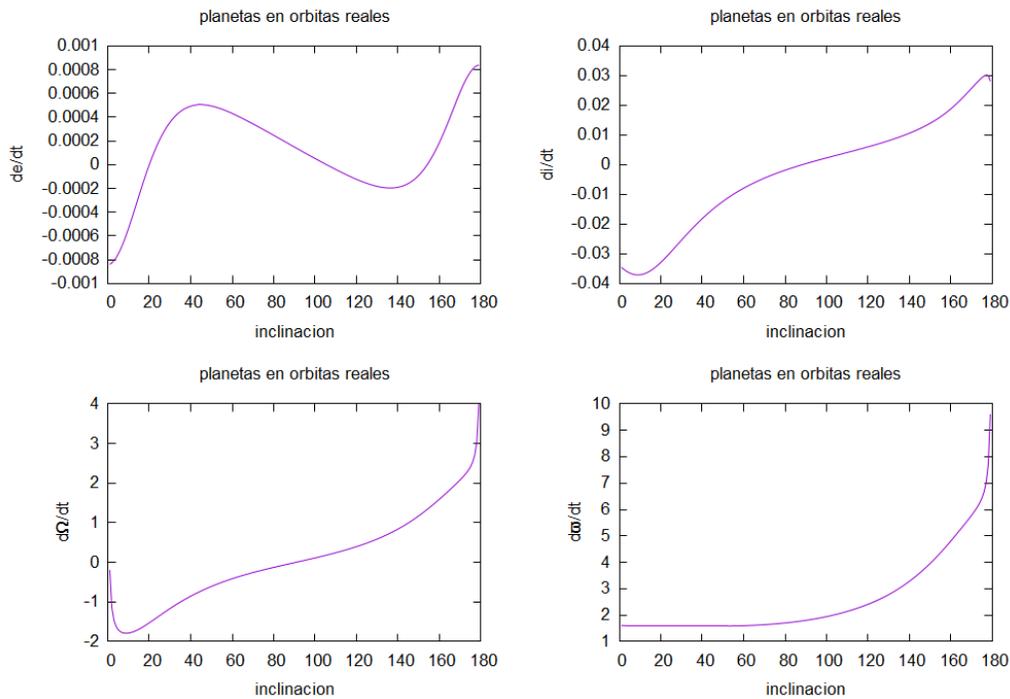


Figure 25: Las derivadas de los elementos orbitales (en unidades de siglos<sup>-1</sup>) calculadas con las ecuaciones de Lagrange usando  $R_{sec}$  numérica en función de la inclinación para una partícula de  $a = 3.0$ ,  $e = 0.1$ ,  $\Omega = \varpi = 60$ . Consideramos como perturbadores a los 4 gigantes en sus órbitas reales respecto a la eclíptica.

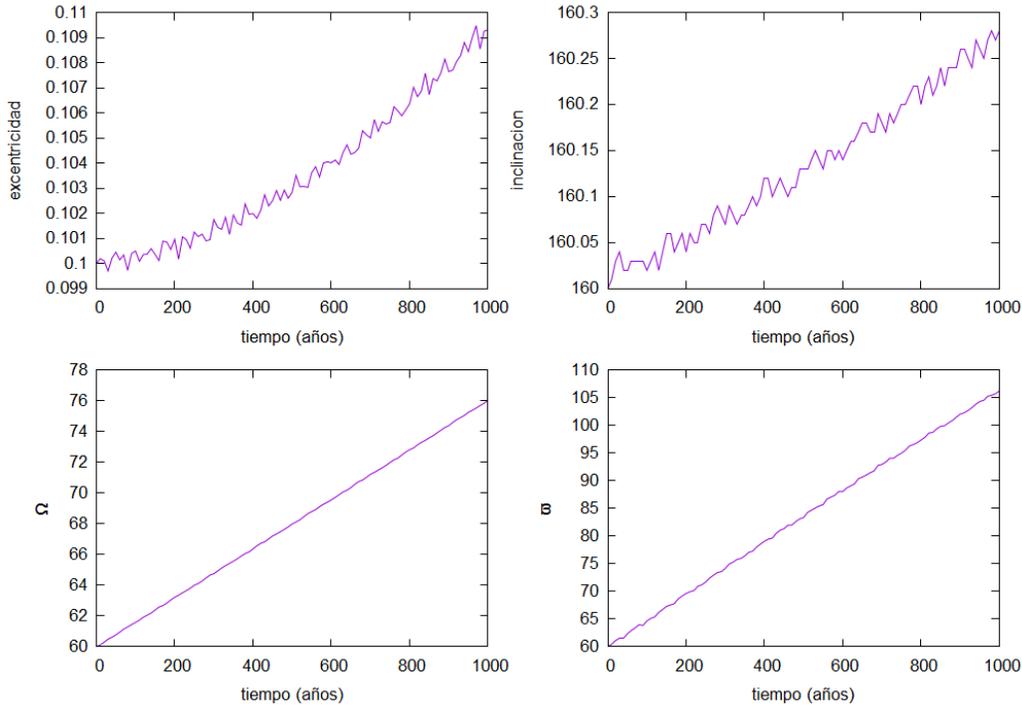


Figure 26: Las evolución de los elementos orbitales osculantes calculados con el integrador EVORB para el mismo objeto que en la figura 25 pero con  $i = 160$ .

que en la teoría de perturbaciones de mayor orden esas perturbaciones pueden ser consideradas. Por eso se suele decir que las  $R_{sec}$  numéricas son exactas *a primer orden en las masas*, ver 4.2.

## 5.2 Aplicación: la receta de sumar las masas al Sol

Con el algoritmo de calculo numérico de la variaciones en los elementos orbitales presentamos en la figura 27 el efecto en  $(\Omega, \varpi, M_r)$  de la  $R_{sec}$  generada por Júpiter en una partícula con  $e \sim i \sim 0$  para diferentes  $a$ . Recordar que  $M_r$  es la anomalía media en la época de referencia, si no es un valor fijo significa que la anomalía media osculante además de ser definida por el movimiento medio  $n$  tendrá una componente debido a la variación de  $M_r$  ya que  $M = M_r + nt$ , donde  $t$  se mide desde la época de referencia. Se grafican las variaciones en relación al movimiento medio de la partícula. Ver que siempre tenemos  $d\varpi/dt > 0$  mientras que  $d\Omega/dt < 0$ , los perihelios avanzan y los nodos precesan al menos para este tipo de órbitas. Pero es interesante notar 2 cosas. Primero, que para las partículas interiores  $dM_r/dt < 0$  mientras que para las exteriores  $dM_r/dt > 0$ . O sea, las partículas interiores presentan un movimiento medio efectivo ( $n' = n + dM_r/dt$ ) menor al osculante (son mas lentas) y las exteriores presentan un movimiento mas rápido como si fueran atraídas por una masa central levemente superior a la solar. Y segundo: a medida que el objeto ocupa órbitas cada vez mas lejanas el efecto de Júpiter no tiende a cero sino que hace incrementar el movimiento medio en 2 milésimas y esto es como incrementar 4 veces su masa  $m$  al Sol pues si la masa central se incrementara en 0.001 (1 masa de Júpiter) entonces el movimiento medio observado seria  $\sqrt{1 + 0.001}$  veces mayor, o sea aproximadamente 1.0005. Como podemos explicar esta paradoja? En realidad esta bien suponer que la masa central se incrementa en 1 masa de Júpiter pero hay que considerar que esto también implica que  $\mu = k^2$  pasa a ser  $\mu' = k^2(1 + m)$ . Y una variación  $\Delta\mu = k^2m$  genera un  $\Delta a$

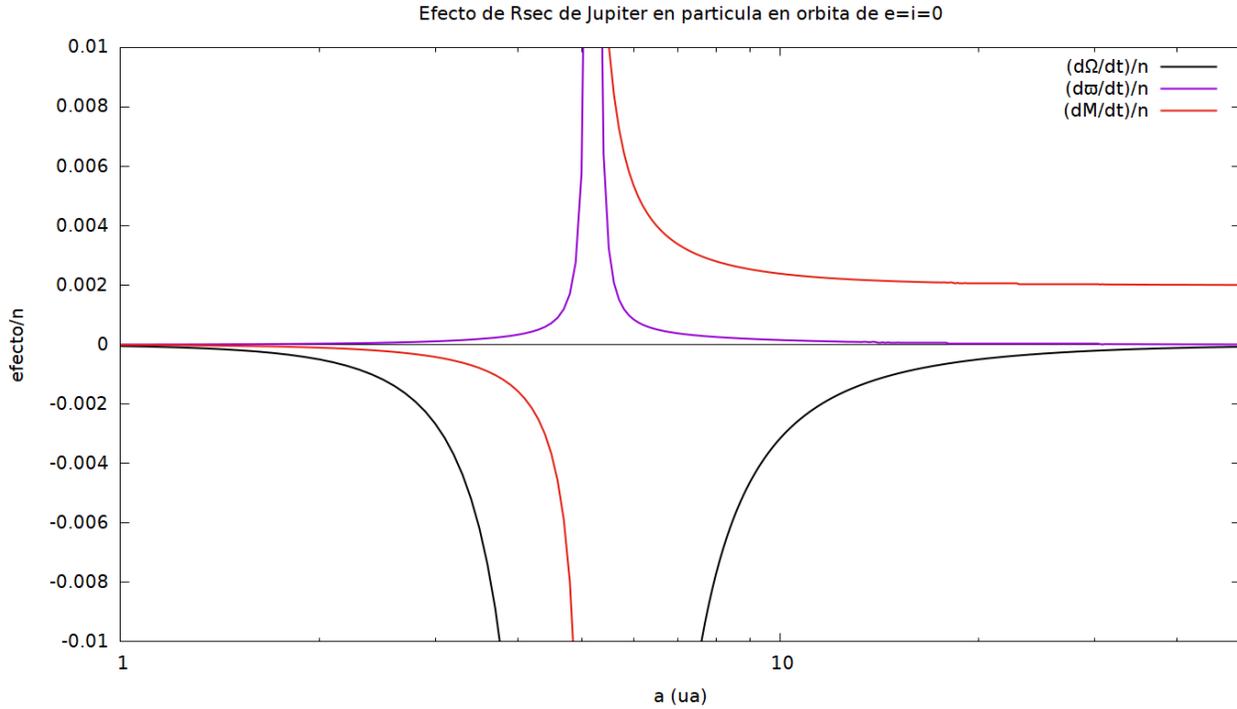


Figure 27: Las perturbaciones seculares generadas por Júpiter en una partícula en órbita cuasi circular de semieje  $a$  y cuasi coplanar en los elementos  $(\Omega, \varpi, M)$  a partir de la  $R_{sec}$  numérica. Se puede ver que el efecto de Júpiter siempre para todo  $a$  es disminuir el nodo y aumentar el perihelio. En cambio para órbitas internas el movimiento medio observado es menor al osculante mientras que para órbitas externas es mayor.

$$\frac{\Delta a}{a} = -v^2 \frac{a}{\mu} \frac{\Delta \mu}{\mu} \quad (139)$$

lo cual se demuestra a partir de diferenciar  $v^2/\mu + 1/a = 2/r$ . Notar que  $\Delta a < 0$ . Si sustituimos  $v^2$  por su valor medio en un periodo orbital  $v^2 = \mu/a$  entonces

$$\frac{\Delta a}{a} \simeq -\frac{\Delta \mu}{\mu} \simeq -m \quad (140)$$

Entonces el semieje cambia a  $a' = a + \Delta a \simeq a(1 - m)$  y en consecuencia la relación entre el nuevo y el viejo movimiento medio es

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{(1+m)}{(a'/a)^3}} = \sqrt{\frac{(1+m)}{(1-m)^3}} \simeq \sqrt{1+4m} \simeq 1+2m \quad (141)$$

que es lo que se puede apreciar en la figura 27. Quiere decir que el efecto de un planeta de masa  $m$  en el movimiento medio de objeto exterior a su órbita NO es equivalente a SOLO sumar su masa al Sol, sino que ADEMÁS hay que considerar que su semieje disminuye en un factor  $m$ .

**Ejercicio.** Considere el efecto de Júpiter de masa  $m$  en un objeto muy lejano de  $i \sim e \sim 0$ . A partir de la ec. 97 probar que  $R_{sec} \simeq -k^2 m/a$ . Trabajando en variables canónicas de Delaunay hallar  $\mathcal{H}$  y probar que  $\frac{d\varpi}{dt} = 0$  y  $\frac{dM}{dt} = n(1+2m)$ .

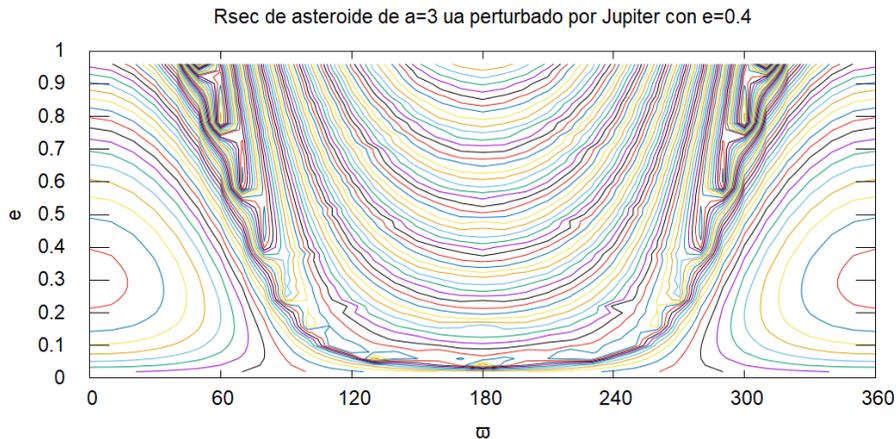


Figure 28: Curvas de nivel de  $R_{sec}$  calculada numéricamente mostrando posibles trayectorias seculares de un asteroide perturbado por un Júpiter coplanar y excéntrico ( $a = 5.2$  ua,  $e = 0.4$ ,  $\varpi = 0$ ). Toda la región interior a la separatriz no es realista pues conduce a colisión.

### 5.3 Evolución de partícula con perturbadores en órbitas fijas

Primero supongamos que lo que genera la perturbación secular no varía con el tiempo (órbitas planetarias fijas por ejemplo). Recordemos que al calcular numéricamente  $R_{sec}$  no hay restricciones al tipo de órbita estudiada. Podemos estudiar centauros en órbitas retrogradadas y cometas sungrazers por citar casos extremos.

#### 5.3.1 Evolución secular de asteroide coplanar con un planeta excéntrico

En el caso en que podamos suponer al asteroide en el mismo plano que el planeta el sistema tiene apenas 1 grado de libertad y las curvas de nivel de  $R_{sec}(e, \varpi)$  se pueden representar gráficamente a partir de una grilla de valores de  $(e, \varpi)$  del asteroide. Esto se puede implementar en un código que contenga el algoritmo del cálculo numérico de  $R_{sec}$  dado por 136. En la figura 28 presentamos las curvas de nivel que representan las evoluciones seculares posibles de un asteroide de  $a = 3$ ua perturbado por un Júpiter de  $e = 0.4$ . Las curvas irregulares corresponden a colisiones con Júpiter y constituyen una separatriz que divide la región de oscilaciones en torno de  $\varpi = 0$  protegida de colisiones con el planeta de otra región que inevitablemente lleva a colisión con el planeta (y por lo tanto las curvas no son realistas). Las teorías analíticas que vimos antes basadas en desarrollos en series son incapaces de generar estos resultados. Esta metodología fue utilizada por Hadden et al. (2017) para estudiar el pastoreo de los TNOs con el planeta 9.

#### 5.3.2 Evolución secular espacial de asteroide

Dado que las expresiones para  $d(e, i, \Omega, \varpi)/dt$  obtenidos con las ecuaciones de Lagrange son válidas podemos utilizarlas para predecir la evolución secular de los objetos usando  $R_{sec}$  numérica. Hicimos el código `evosecular.f` que calcula  $R_{sec}$  y sus derivadas, calcula  $d(e, i, \Omega, \varpi)/dt$  y utiliza estos valores para predecir los nuevos elementos un cierto  $\Delta t$  posterior (puede ser del orden de algunos periodos orbitales de la partícula y puede ser negativo, pero para obtener resultados muy precisos se recomienda algo entre 1 y 2 periodos orbitales). Con los nuevos elementos se calcula todo de nuevo y se predice una nueva posición en el espacio  $(e, i, \Omega, \varpi)$ . De esta forma vemos como evolucionan los elementos orbitales siempre suponiendo que las órbitas de los planetas perturbadores no cambian. En las figuras 29 y 30 ponemos un ejemplo de una partícula con inclinación inicial 160. El acuerdo es notable y las diferencias se deben a que

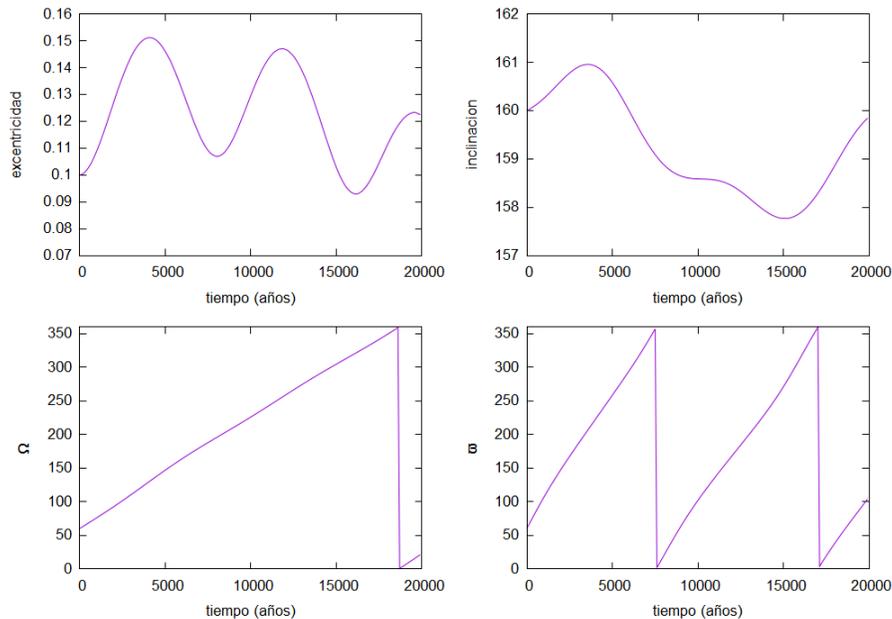


Figure 29: Evolución secular de una partícula obtenida integrando las ecuaciones de Lagrange con  $R_{sec}$  con paso 100 yrs (!). Consideramos como perturbadores a los 4 gigantes en sus órbitas reales pero fijas.

en la integración con EVORB los planetas se perturban y cambian sus órbitas mientras que al integrar las ecuaciones planetarias de Lagrange suponemos a los planetas en órbitas fijas.

Este método nos permite ver el efecto de cada planeta y como influye cada elemento orbital de cada planeta en las partículas sin considerar los efectos debidos a las perturbaciones mutuas (cambiantes) de los planetas entre si. En particular, como veremos mas adelante, el procedimiento permite reproducir el mecanismo de Lidov-Kozai ya sea para un sistema perturbador coplanar circular (hipótesis original de Lidov-Kozai) o para el caso real de perturbadores excéntricos e inclinados. Podemos estudiar la evolución secular de cualquier objeto sin las oscilaciones de corto periodo ni las perturbaciones aleatorias que surgen en las integraciones de las ecuaciones exactas de movimiento.

### 5.3.3 Determinación de elementos propios y forzados

Integrando como hicimos en la sección anterior y graficando  $(e \cos \varpi, e \sin \varpi)$  y  $(i \cos \Omega, i \sin \Omega)$  obtenemos la figura 31 de donde podemos determinar los valores propios y forzados. El radio de los círculos nos da  $e_p$  y  $i_p$  y las distancias entre los orígenes de las coordenada y el centro de los círculos nos dan los valores forzados de  $e, i$  debido a los planetas. Estos modos forzados permanecen fijos siempre que las órbitas planetarias no cambien y corresponden a la foto del sistema correspondiente al instante en que se tomaron los elementos de los planetas perturbadores. Mientras que los propios giran en torno del centro y giran con las frecuencias propias en  $\Omega$  y  $\varpi$ . De nuevo, al calcular  $R_{sec}$  numéricamente no hay restricción en  $e, i$  y como los planetas están en órbitas fijas los modos forzados son vectores fijos, el único movimiento es debido a las frecuencias propias, que podrán deducirse de la gráfica. La determinación de los elementos propios y forzados por este método es mas fácil que integrar con EVORB pues al integrar numéricamente los modos forzados cambian y resulta mas complicado separar la parte forzada cambiante y la propia. Si la evolución en los planos  $(k, h)$  o  $(q, p)$  no son círculos es porque la teoría simplificada que vimos en 4.6.6, valida para bajas  $(e, i)$  ya no es aplicable. La teoría sólo es valida para bajas  $(e, i)$  de lo contrario las trayectorias no son círculos sino figuras

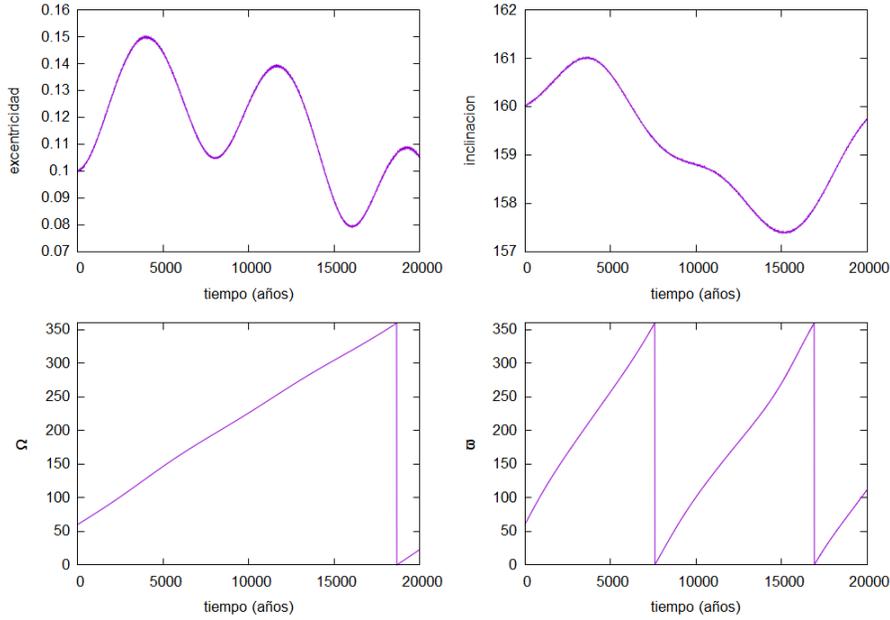


Figure 30: Evolución de una partícula obtenida integrando las ecuaciones exactas de movimiento con EVORB. Consideramos como perturbadores a los 4 gigantes en sus órbitas reales que evolucionan. Las diferencias con la figura 29 se deben a que aquí los planetas tienen órbitas que evolucionan.

mucho más complejas (Gallardo and Cabral, 2025). En el apéndice 7.1 mostramos el efecto de las inclinaciones y excentricidades planetarias en la evolución de una partícula. En el sitio AstDyS se presentan varios catálogos y métodos de determinación de elementos propios. Ver una revisión en Knezevic et al. (2002).

#### 5.3.4 Resonancias seculares: localización numérica

A partir del análisis de la figura 31 podemos deducir las frecuencias propias de la evolución de  $d\varpi_{prop}/dt$  y  $d\Omega_{prop}/dt$  y conociendo los valores de las frecuencias fundamentales del sistema  $(g_i, f_i)$  podemos explorar el espacio  $(a, e, i)$  para ver donde tenemos resonancias seculares, como se muestra para el Sistema Solar en la figura 13. Si los planetas tuvieran  $e = i = 0$  las  $d\varpi/dt$  y  $d\Omega/dt$  deducidas de las ecuaciones de Lagrange ya serían las propias pues el modo forzado sería nulo. Entonces un truco para encontrar las resonancias seculares fácilmente (cuidado, sólo válido para bajas  $(e, i)$ ) sería calcular  $d\varpi/dt$  y  $d\Omega/dt$  en función de  $(a, e, i)$  de la partícula imponiendo  $i = e = 0$  para todos los planetas perturbadores. Esas  $d\varpi/dt$  y  $d\Omega/dt$  presentan cierta dependencia con el valor de  $\omega$  para  $(e, i)$  que no son bajas- Para bajas  $(e, i)$  son independientes de  $\omega$  pero para altas  $(e, i)$  hay una alta dependencia con  $\omega$  por lo que la búsqueda de resonancias seculares por esta vía pierde sentido. En las figuras 32 y 33 se muestran los valores de  $d\varpi/dt$  y  $d\Omega/dt$  en función de  $a$  para 2 tipos de órbita para la partícula test. Donde se cruzan las líneas tendremos resonancias seculares con algún planeta gigante y las partículas tendrán grandes variaciones en  $e$  o  $i$ . La idea de calcular numéricamente las resonancias seculares se desarrolló por primera vez en la tesis de doctorado de Williams en 1969 y está basada en las ideas de cálculo numérico de funciones perturbadoras medias debidas a Gauss. No olvidar que más allá de la técnica empleada la resonancia secular necesariamente ocurre cuando una frecuencia propia del asteroide coincide o tiene relación sencilla con las frecuencias fundamentales del sistema.

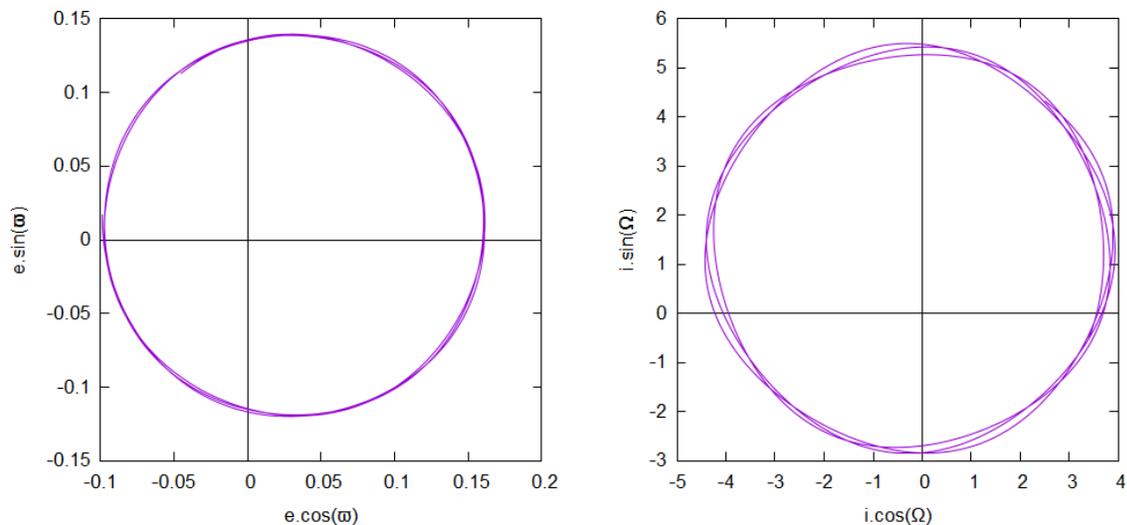


Figure 31: Evolución secular de una partícula obtenida integrando las ecuaciones de Lagrange con paso 100 yrs. Consideramos como perturbadores a los 4 gigantes en sus órbitas actuales fijas. De aquí podemos deducir los valores propios y forzados y las frecuencias propias. Para altas  $(e, i)$  las figuras dejan de ser círculos y el concepto de elemento propio se complejiza.

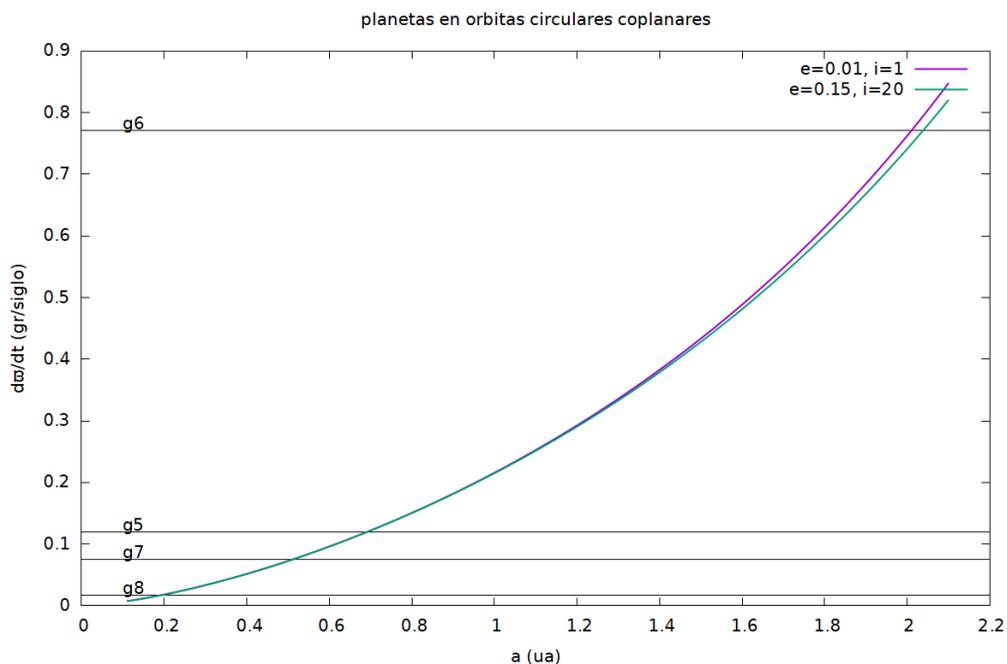


Figure 32: Cálculo de  $d\varpi/dt(a)$  en el sistema solar interior considerando los 4 planetas gigantes en órbitas circulares coplanares. El cálculo de  $d\varpi/dt(a)$  corresponde a 2 órbitas diferentes, una con baja  $(e, i)$  y otra con  $(e, i)$  mayores. Las líneas horizontales indican los valores de las frecuencias propias del sistema planetario. En los puntos de corte tenemos resonancia secular, se aprecia cierta sensibilidad de la localización de las resonancias seculares en función de  $(e, i)$ .

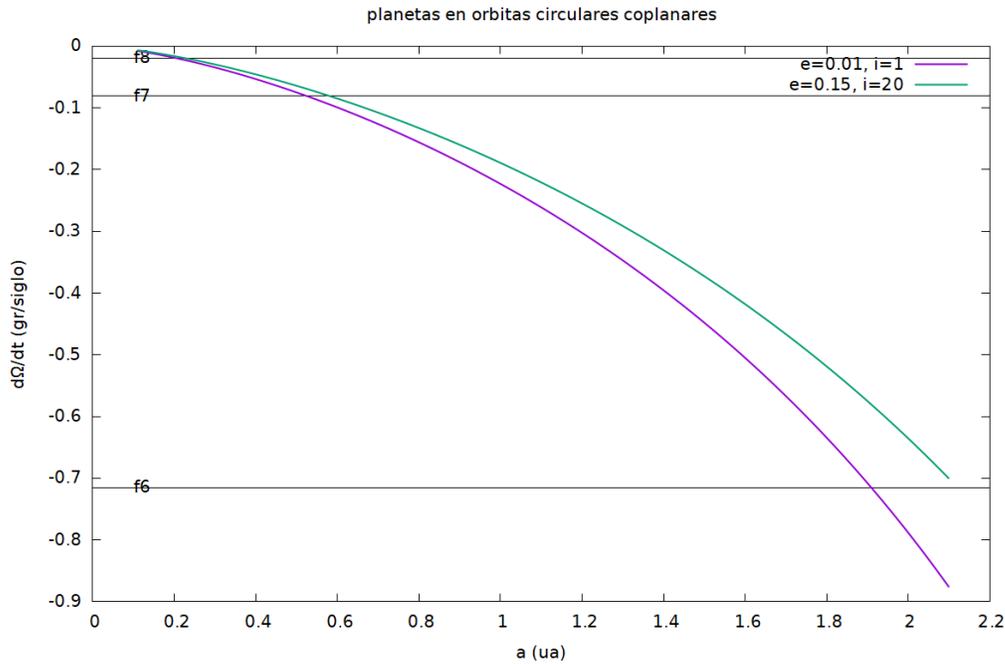


Figure 33: Calculo de  $d\Omega/dt(a)$  en el sistema solar interior considerando los 4 planetas gigantes en órbitas circulares coplanares. El calculo de  $d\Omega/dt(a)$  corresponde a 2 órbitas diferentes, una con baja  $(e, i)$  y otra con  $(e, i)$  mayores. Las líneas horizontales indican los valores de las frecuencias propias del sistema planetario. En los puntos de corte tenemos resonancia secular, se aprecia clara sensibilidad de la localización de las resonancias seculares en función de  $(e, i)$ .

### 5.3.5 Perturbadores circulares y coplanares: ZLK numérico

Si suponemos que los planetas perturbadores tienen órbitas circulares y planas se puede calcular  $R_{sec}(\omega, e)$  numéricamente en forma exacta y considerando varios planetas perturbadores con semiejes arbitrarios respecto a la partícula perturbada. En este caso el calculo es exacto y no hay limitantes en los elementos  $a, e, i$ . El calculo numérico se encuentra explicado en Bailey et al. (1992); Thomas and Morbidelli (1996); Gallardo et al. (2012). Al ser  $R_{sec}$  mas exacta que la obtenida analíticamente, la dinámica resultante sera mas rica que la del modelo de cuadrupolo u ordenes superiores, y suelen aparecer nuevos puntos de equilibrio para  $\omega$ . Ademas es posible suponer órbitas planetarias excéntricas e inclinadas pero la dinámica sera mas compleja aun pues  $\Omega$  ya no sera una variable ignorable y su momento conjugado  $H$  no sera constante (Naoz, 2016). Con el código `mapakozai.f` calculamos las curvas de nivel para 3 partículas con semiejes  $a = 3, 5.2, 8$  ua considerando unicamente Júpiter en órbita circular. Los resultados están en la figura 34, notar como los puntos de equilibrio cambian según el tipo de órbita: interior, coorbital, exterior. En los modelos analíticos de cuadrupolo o octupolo era imposible estudiar el caso de  $a \sim a_p$ . Con esta técnica numérica Bailey et al. (1992) demostraron que el origen de algunos cometas tipo sungrazers esta en el mecanismo de Zeipel-Lidov-Kozai.

Finalmente, notar que los perturbadores en órbitas coplanares y circulares generan variaciones muy importantes en órbitas de altas  $(e, i)$ , por lo tanto los resultados de la teoría secular de bajas  $(e, i)$  con trayectorias circulares en los planos  $(k, h)$  y  $(q, p)$  (y por tanto excentricidad e inclinación constantes) ya no se pueden extender a estos casos. Justamente el mecanismo ZLK es una manifestación de la destrucción de la teoría secular construida para bajas  $(e, i)$ .

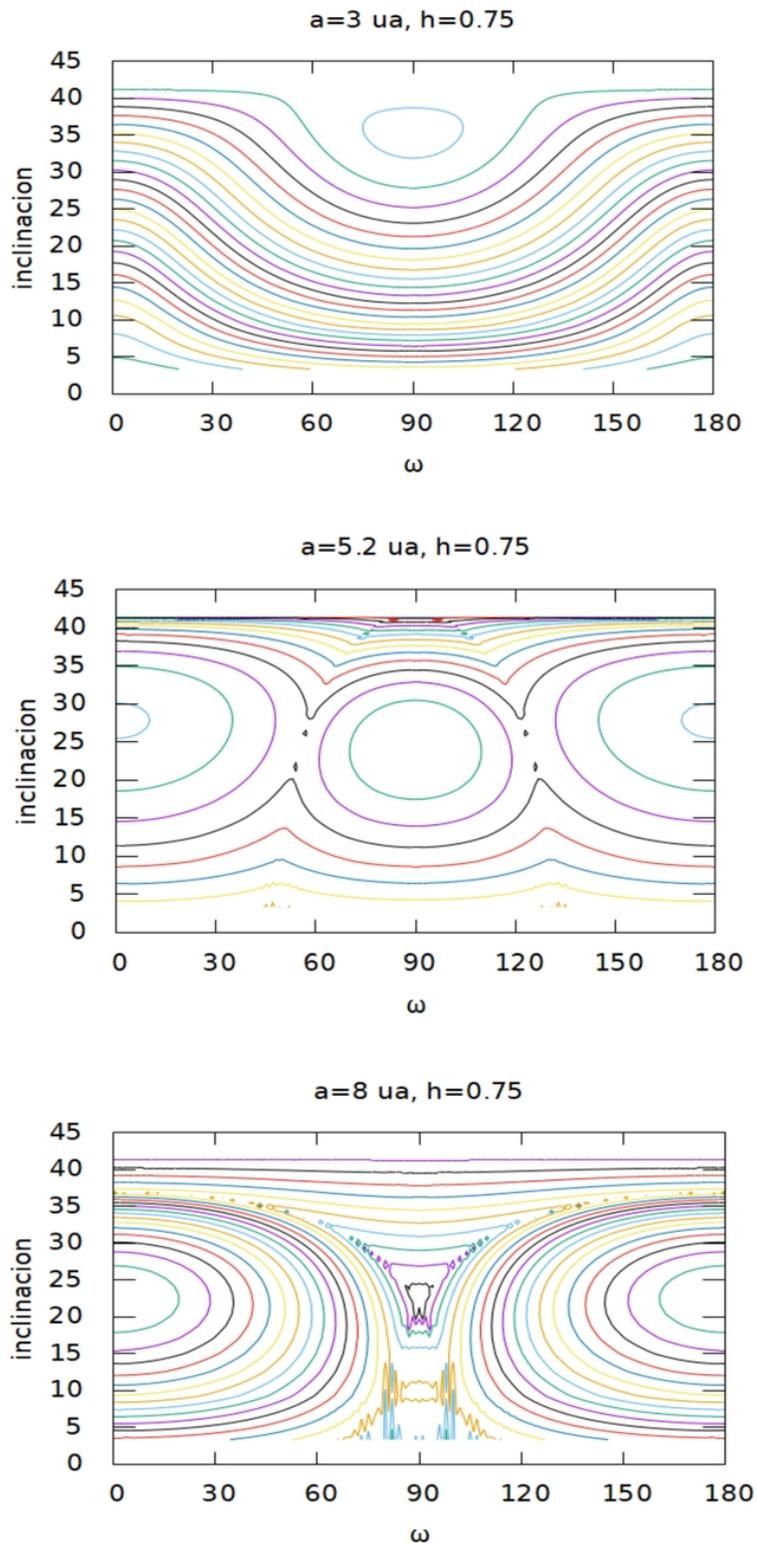


Figure 34: Curvas de nivel calculadas numéricamente para 3 partículas con  $h = \sqrt{1 - e^2} \cos i = 0.75$  pero con semiejes diferentes considerando como único perturbador a Júpiter en órbita circular. Notar como cambian los puntos de equilibrio según el tipo de órbita. Las irregularidades en la última gráfica se debe a encuentros entre el planeta y la partícula.

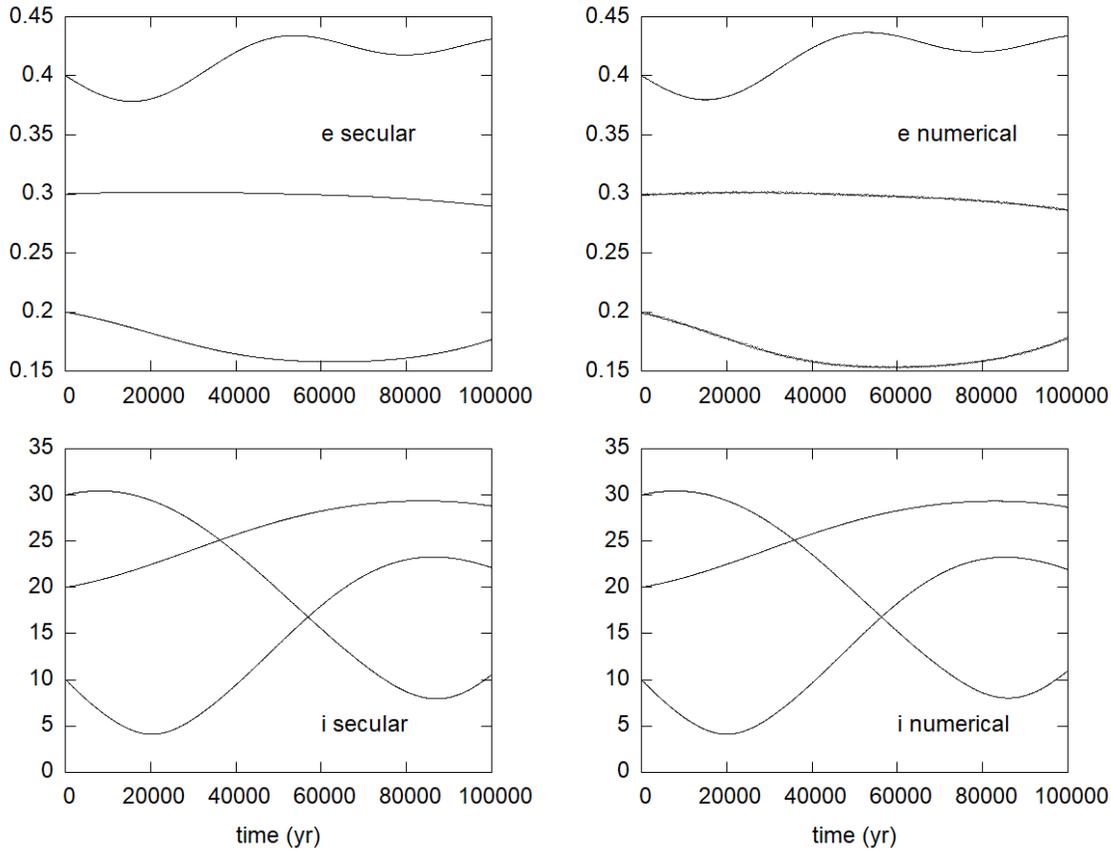


Figure 35: Evolución secular de un sistema de 3 planetas de masa 0.1 masas de Júpiter evolucionando con altas  $(e, i)$ . A la izquierda el resultado del modelo secular con paso 100 años y a la derecha lo que sale de la integración numérica de las ecuaciones exactas de movimiento.

#### 5.4 Evolución secular de sistema planetario y partículas

El estudio que hicimos para un asteroide se puede hacer para cada planeta de un sistema. O sea, todos cuerpos masivos. Dados  $N$  planetas, para cada uno calculamos la  $R_{sec}$  y sus derivadas generadas por los otros  $N - 1$  y luego las ecuaciones planetarias y así se pueden obtener las variaciones de los elementos orbitales en el instante inicial para todos los planetas. Si agregamos un loop mas al algoritmo también podemos obtener las evoluciones seculares de los elementos de todos los planetas integrando como hicimos antes con la diferencia que ahora todas las órbitas evolucionan. El código se llama `evoplanetario.f` y también se puede aplicar al estudio de un asteroide (colocando el asteroide con masa 0). En la figura 35 vemos la comparación de resultados del modelo secular y una integración numérica exacta con EVORB. El acuerdo es notable y las diferencias que pueden aparecer se deben a lo precario del método de Euler usado en la integración del modelo secular. También hay diferencias en caso de que el sistema este próximo a una resonancias de movimientos medios pues la teoría secular no es capaz de seguir ese tipo de evoluciones.

Viendo las ecuaciones planetarias notar que la perturbación para un cierto planeta asi como la variación de sus elementos orbitales en un cierto instante *es independiente de su masa*. Por mas masivo que sea,  $de/dt$  por ejemplo sera el mismo. Su masa es importante en la evolución posterior pues afectara la evolución de los demás planetas. Poniendo y quitando un planeta podemos ver sus efectos seculares y poder determinar si el planeta merece ser llamado planeta o no. Por ejemplo podemos hacerlo con Mercurio, con Ceres, Pluton, etc. A partir de cierto

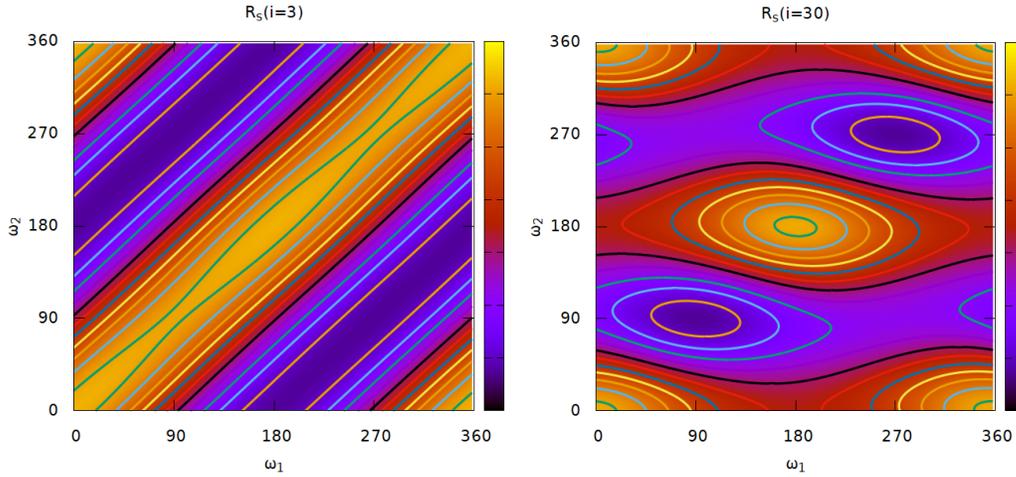


Figure 36:  $R_s(\omega_1, \omega_2)$  para dos planetas con  $e_i = 0.2$ ,  $a_1/a_2 = 0.49$  y para 2 inclinaciones mutuas diferentes. El plano de referencia es el invariable de Laplace por lo que  $\Delta\Omega = 180$ .

criterio a definir podríamos establecer una definición de planeta: un cuerpo que afecta al resto del sistema (invento mio, a desarrollar).

### 5.5 Dinámica secular de 2 planetas

Por lo que vimos en 4.11 la  $R_s$  para 2 planetas en órbitas arbitrarias puede reducirse a 2 grados de libertad lo que implica 4 variables. La evolución del sistema seguirá estas curvas de  $R_s = cte$ , el problema es que es difícil de representar y analizar en un espacio de 4 dimensiones. En Gallardo and Suescun (2025) se propone estudiar las curvas de nivel en el subespacio  $R_s(\omega_1, \omega_2)$  y lo que se encuentra es que hay un cambio de régimen a partir de cierta inclinación mutua próxima a 30 grados. Para inclinaciones bajas las curvas de nivel en torno a mínimos y máximos de  $R_s$  siguen aproximadamente la relación  $\Delta\varpi = 0, 180$  pero para inclinaciones altas cambian a islas verificando  $\omega_1 = \omega_2 = K90$ , siendo  $K$  entero. Las configuraciones  $\Delta\varpi = 0, 180$  son las que conocemos del caso plano y nos dicen que lo relevante es la proximidad espacial entre las líneas de los apses. Pero para cierta inclinación mutua esto ya no se cumple y el sistema busca equilibrios en configuraciones donde las líneas de los apses sean perpendiculares a la línea común de los nodos. Un ejemplo se muestra en la figura 36. Como las masas planetarias son un factor multiplicativo los resultados son independientes de ellas, en cambio sí hay una dependencia con  $a_1/a_2$  y las  $e_i$ .

### 5.6 Validez de la teoría secular

La integral  $R_{sec}$  tiene unidades de energía y siempre es menor que la energía de ligadura al Sol que es  $k^2 M_\odot / (2a)$  por lo que, teóricamente, no representa un peligro para la estabilidad de la partícula, de hecho en la teoría secular  $a$  permanece constante. Si la partícula esta en los confines del sistema solar el efecto de  $R_{sec}$  de Júpiter es el mismo que agregar su masa al Sol, bueno... o no exactamente por lo que vimos al final de 5.1.

Pero lo que nos interesa saber es en que condiciones la evolución por  $R_{sec}$  es admisible, o sea, cuan rápidas pueden ser las variaciones de  $R$  sin que se destruya la evolución secular que nos da la teoría. Sabemos que no debe haber encuentros próximos ( $R$  tiene un gran pico y hay un quiebre en la evolución), pero mismo así es posible que la teoría falle cuando las órbitas son muy excéntricas pues la perturbación secular calculada no es representativa de la evolución real en donde la distancia al planeta varía demasiado y rápidamente. Un posible diagnostico lo

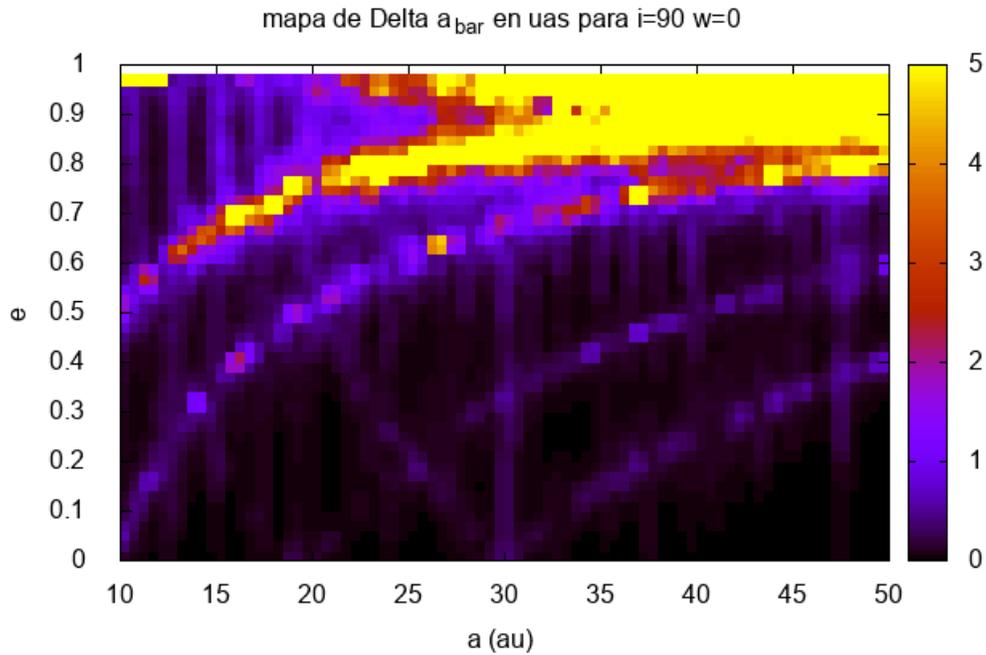


Figure 37: Mapa  $\Delta a_{bar}$  en ua a partir de integración numérica de las ecuaciones de movimiento. Desde rojo a amarillo son valores muy altos y es de esperar que la evolución secular sea imposible.

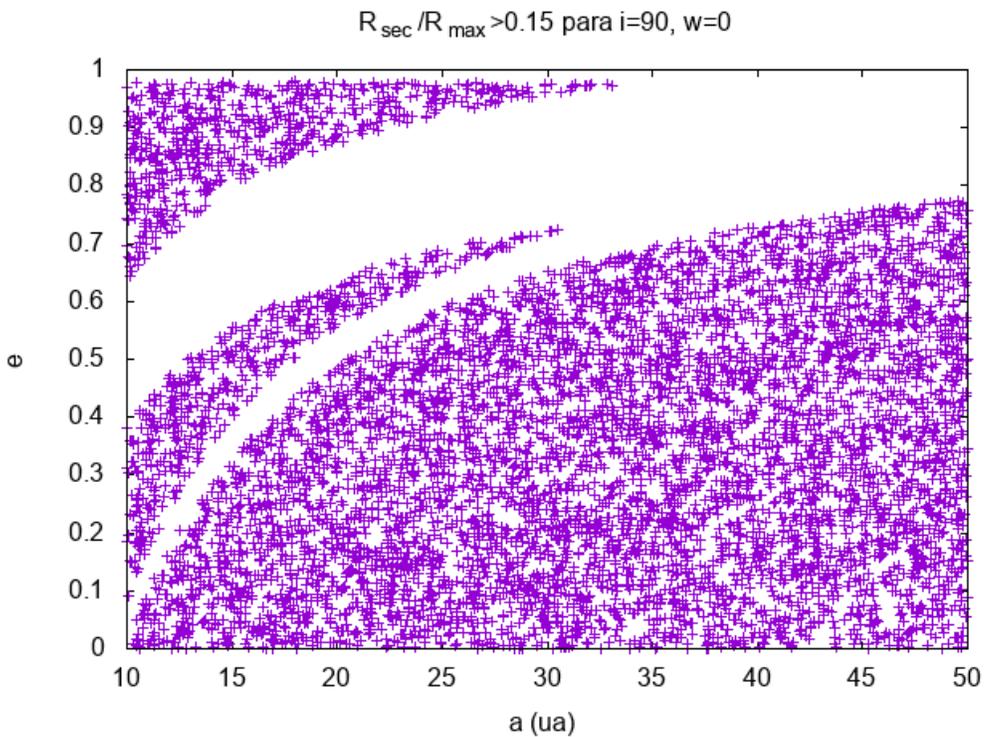


Figure 38: Para las mismas condiciones de la figura 37 plotamos las regiones donde  $R_{sec}/R_{max} > 0.15$ .

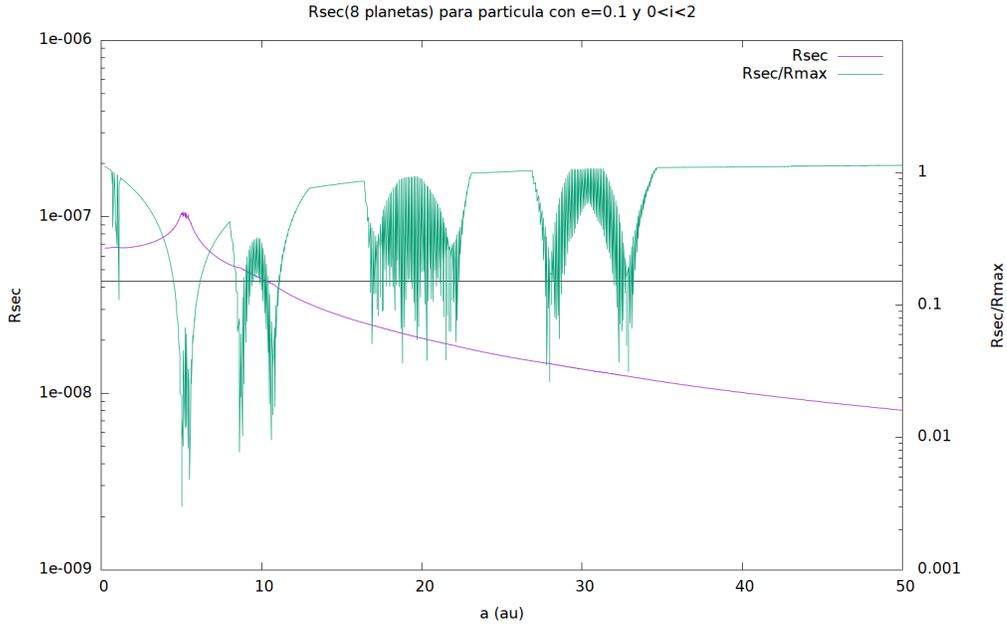


Figure 39:  $R_{sec}$  y  $R_{sec}/R_{max}$  considerando todos los 8 planetas para partículas con semiejes entre 0 y 50 ua con  $e = 0.1$  y baja inclinación. Por encima de la línea negra estaría la zona donde la  $R_{sec}$  sería válida.

daría el monitoreo de la evolución del semieje en integraciones numéricas. Si presenta grandes variaciones o sistemáticas entonces claramente la evolución deja de ser secular. De acuerdo a Gallardo (2019a) en el caso del Sistema Solar para  $a < 2.5$  ua hay evoluciones seculares incluso para muy altas  $e$  pero para  $a > 5$  ua ya es difícil encontrar regiones bajo régimen secular para  $e > 0.3$ . Existen regiones en donde el semieje se mantiene constante pero debido a resonancias de movimientos medios, y la evolución resonante es otra cosa pues la función perturbadora esta dominada por otros términos, ni seculares ni de corto periodo.

Podemos hacer un experimento para comparar lo que dice la teoría secular con los resultados de la integración numérica. Incluyendo los 4 planetas gigantes integramos partículas con  $10 < a < 50$  ua,  $0 < e < 0.98$  y asumiendo siempre  $i = 90$ ,  $\omega = 0$ ,  $M = 90$  y monitoreamos el  $\Delta a_{bar}$ . Ver figura 37. Por otro lado podemos calcular numéricamente  $R_{sec}$  incluyendo los 4 gigantes y en cada calculo registramos el máximo de  $k^2 m_{pla} / \Delta$ , o sea el máximo de la función perturbadora directa. Ploteamos las regiones del espacio  $(a, e)$  donde  $R_{sec}/R_{max} > X_{lim}$ , es decir regiones donde la perturbación total secular es suficientemente grande (mayor que cierto limite) en comparación con las perturbaciones individuales. Luego de varios intentos, en la figura 38 se muestran las regiones donde  $R_{sec}/R_{max} > 0.15$ . Como ambas regiones en las figuras 37 y 38 mas o menos se corresponden podemos tomar como criterio de validez de la evolución secular los casos donde  $R_{sec}/R_{max} > 0.15$  pues es en esa región donde aproximadamente  $\Delta a < 1$  ua (criterio que tal vez haya que revisar). En la figura 39 mostramos como varían  $R_{sec}$  y  $R_{sec}/R_{max}$  generadas por los 8 planetas para partículas a lo largo del sistema con  $e = 0.1$  baja inclinación. Vemos que cuando hay encuentros próximos  $R_{sec}/R_{max}$  es muy chica, menor que 0.15, y la aproximación secular no sería válida.

Entonces, no es la baja energía de ligadura al Sol lo que hace una evolución secular inviable sino las grandes y rápidas variaciones de la distancia partícula-planeta. Una evolución suave como lo es la evolución secular generada por  $R_{sec}$  es incapaz de representar en estos casos la real evolución orbital de la partícula. Sin embargo se ha encontrado en ciertos casos como

cometas de largo periodo (Bailey et al., 1992; Thomas and Morbidelli, 1996) que si bien  $a$  varia bastante la evolución en curvas de nivel de  $\mathcal{H} = cte$  se respeta bastante bien. Hay que investigar esto pero puede ser que cuando la  $e$  es muy grande o  $q$  muy chico tal vez el semieje no pese tanto en el Hamiltoniano, y grandes variaciones de  $a$  solo generan pequeñas variaciones en el Hamiltoniano (chequear esto). A este comportamiento le estamos llamando **pseudo-secular** en Fernández et al. (2021).

### 5.7 Teorías sintéticas

Dado que en muchos casos los desarrollos analíticos son muy limitados una alternativa para obtener la evolución secular de un sistema planetario en forma analítica es integrarlo numéricamente con las ecuaciones exactas de movimiento y luego hacer un ajuste por un desarrollo de Fourier. Podemos quedarnos con los términos de largo periodo, por ejemplo, y esos serian los términos seculares. Las primeras teorías sintéticas son las de Carpino et al. (1987) y Bretagnon (1990).

#### Clases en video:

- Clase 15: <https://youtu.be/atDtPjc2Ysw>
- Clase 16: <https://youtu.be/skAiDrAYrE8>

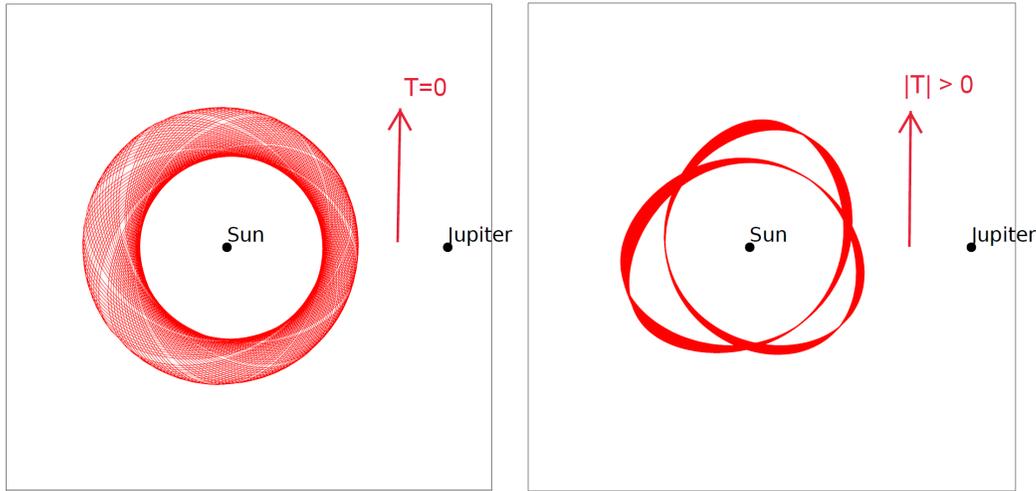


Figure 40: Posiciones relativas en el sistema rotante Sol-Júpiter de un asteroide no resonante (izquierda) y otro resonante (derecha) al cabo de algunos cientos de revoluciones. La componente transversa neta sobre el asteroide es nula en el caso no resonante y diferente de cero en el resonante.

## 6 Resonancias de movimientos medios

### 6.1 Origen del movimiento resonante

Cuando los movimientos medios de un asteroide  $n$  y un planeta perturbador  $n_p$  son tales que  $k_p n_p \simeq kn$  con  $(k_p, k)$  enteros pequeños, los términos en el desarrollo de la función perturbadora que contienen como argumentos a combinaciones de  $k\lambda - k_p\lambda_p$  o múltiplos tendrán una evolución muy lenta y no podemos eliminarlos suponiendo que son de corto periodo. Véase que si  $k < k_p$  el asteroide es interior al planeta y la resonancia es **interior**, mientras que en el caso contrario es una resonancia **exterior**. Ejemplo: los Hildas están en la 3:2 con Júpiter y los plutinos en la 2:3 con Neptuno. Los troyanos son la 1:1. La diferencia  $q = |k - k_p|$  se llama **orden de la resonancia** y como veremos es un parámetro importante.

Si queremos la evolución a largo plazo del sistema los términos resonantes deben ser separados y tratados de forma diferente. Podemos seleccionar del desarrollo clásico de  $R$  los términos seculares y resonantes y resolver las ecuaciones de Lagrange considerando que ahora  $da/dt \neq 0$  pues  $\lambda$  esta presente en  $R$ . Además es necesario agregar una ecuación extra para resolver la variable auxiliar que se introducía para evitar términos lineales en el tiempo en la ecuación para  $\epsilon$ , ver Murray and Dermott (1999, 8.4). Esto se puede hacer pero en variables canónicas es más simple.

Si miramos las ecuaciones de Gauss (por ejemplo ec. 1), la razón de la existencia de las resonancias es que en el largo plazo la conmensurabilidad de movimientos asteroide-planeta genera componentes transversa y normal  $(T, N)$  que varían sistemáticamente con el tiempo a diferencia de las  $(T, N)$  en el caso no resonante en donde oscilan en torno de cero (figuras 40 y 41). En ambos casos existe una componente  $R$  que crece sistemáticamente pero en lo que importa a la evolución del semieje la componente  $T$  es la más relevante y la que genera la típica oscilación (**libración**) orbital. Las resonancias no son un fenómeno dinámico instantáneo como lo es un encuentro con un cuerpo masivo sino que su efecto dinámico comienza a sentirse luego de muchas revoluciones orbitales una vez que la  $T$  comienza a acumularse. Esto genera una

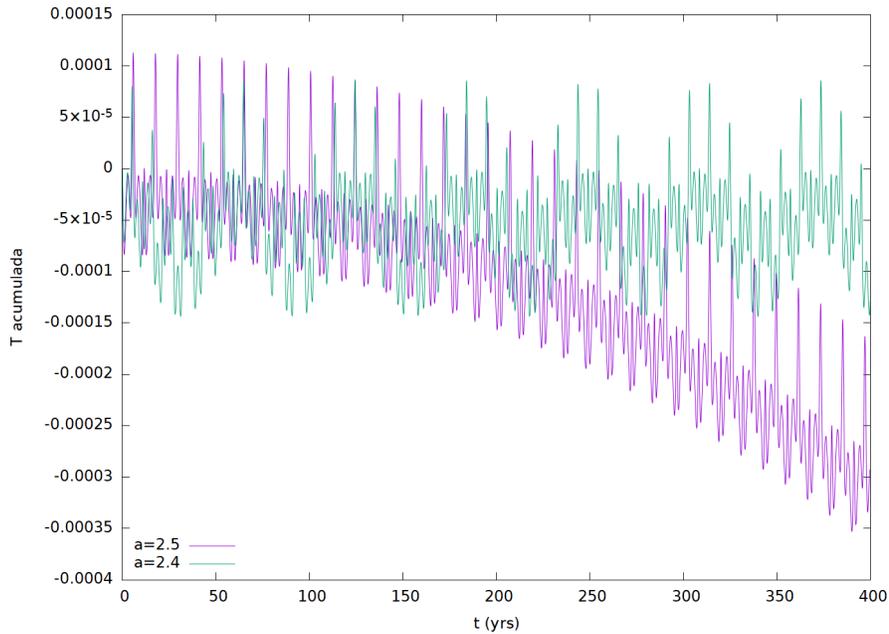


Figure 41: Valor de la componente transversa  $T$  de la perturbación de Júpiter sobre un asteroide en resonancia ( $a = 2.5$  ua) y otro próximo pero fuera de la resonancia ( $a = 2.4$  ua). La componente normal  $N$  tiene un comportamiento similar.

variación de  $a$  que a su vez genera una variación en  $T$  y el efecto en el largo plazo es que tanto  $T$  como  $a$  oscilan con un periodo ni corto ni secular.

Este mecanismo lo podemos ver en la fig 42 donde se muestra el efecto acumulado de la perturbación de Júpiter sobre una asteroide de órbita fija (no es una integración numérica) para diferentes valores del semieje. Podemos ver que la  $R$  acumulada es siempre positiva independientemente de  $a$ , la  $T$  en cambio cambia de signo en la posición nominal de la resonancia 3:1. También mostramos los 2 términos que aportan a  $da/dt$  según la formula de Gauss ec. 1, y finalmente el valor de  $da/dt$  cuando consideramos los 2 términos. La resonancia existe porque a la izquierda existe un  $da/dt > 0$  y a la derecha un  $da/dt < 0$  lo cual genera una oscilación. Ver que el término responsable es el que incluye  $T$  mientras que el generado por la  $R$  aporta poco y en este caso desestabiliza. En las resonancias aparecen estos saltos típicos en  $da/dt$  que son los responsables por oscilaciones estables como en este caso o inestables (cuando el signo de  $da/dt$  pasa de negativo a positivo) según el  $\sigma$  inicial que hayamos tomado, que depende de las  $\lambda, \varpi$  del asteroide y planeta.

Las evoluciones seculares no afectan al semieje mientras que las resonantes lo obligan a oscilar. Cuando las perturbaciones rompen las evoluciones seculares el  $a$  varía caóticamente hasta que, típicamente, el objeto es capturado en una resonancia de movimientos medios (ver figura 43). Paréntesis: existe una teoría de captura en resonancia que dice que los objetos deben poseer órbitas que varían de forma que convergen, o sea se acercan (Tremaine, 2023, cap. 6) pero en la practica con órbitas excéntricas puede ocurrir cualquier cosa. Por lo general la partícula pasa también mucho tiempo en **sticking**, es decir pegada a la resonancia pero fuera de la zona de libración de un lado o del otro. A partir de ese momento el semieje oscila (libra) con cierta amplitud y periodo hasta que eventualmente el objeto escapa de la resonancia. En realidad toda la órbita está en estado de vibración como se muestra en la figura 44. Si miramos en un rango amplio de semiejes los estados resonantes se detectan fácilmente como periodos donde  $a \sim$  constante en un mar de evolución irregular, pero también existen

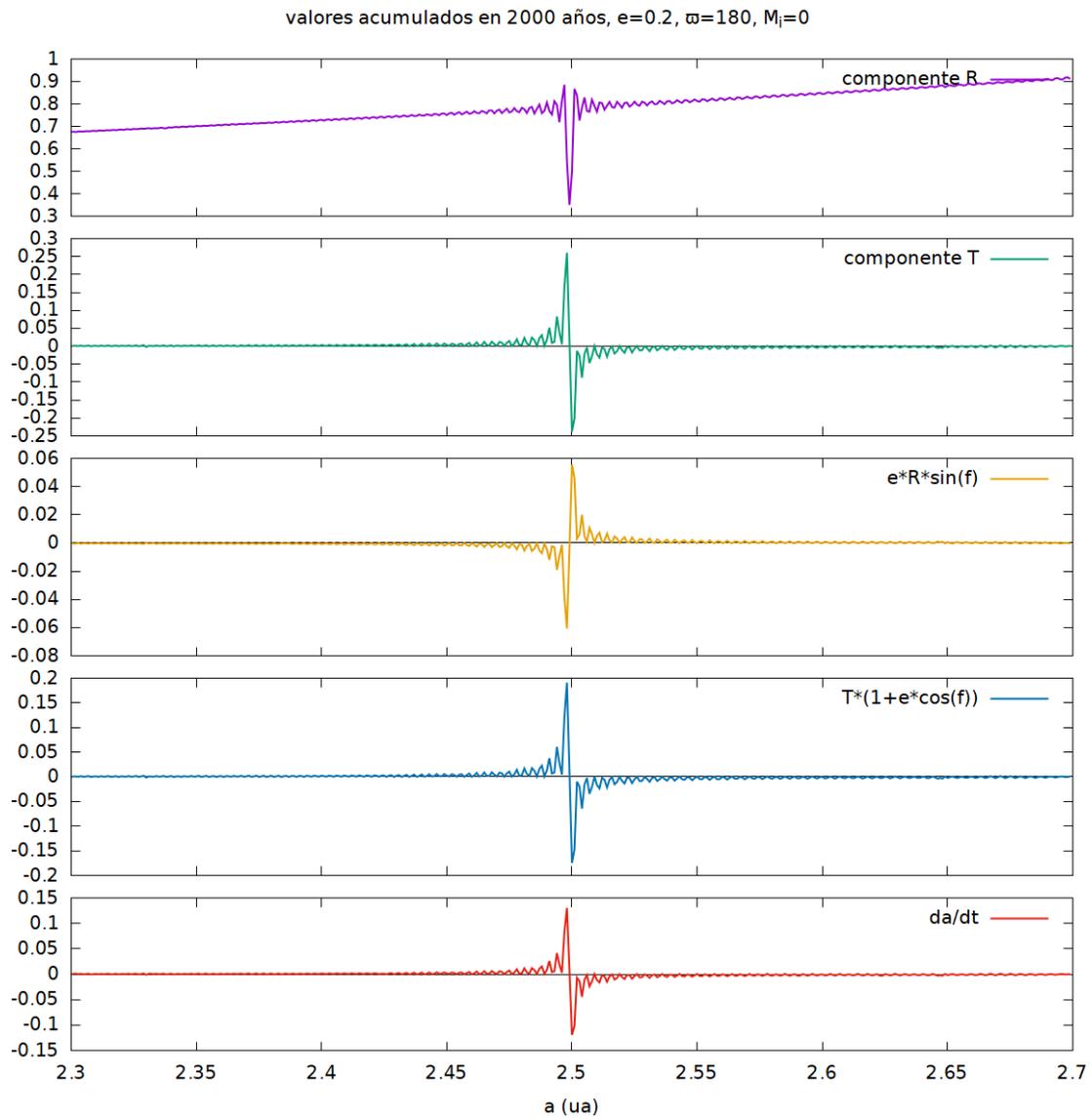


Figure 42: El origen de las resonancias. Valores integrados al cabo de 2000 años de los efectos de Júpiter en las componentes ( $R, T$ ) sobre un asteroide y sus contribuciones a la variación del semieje.

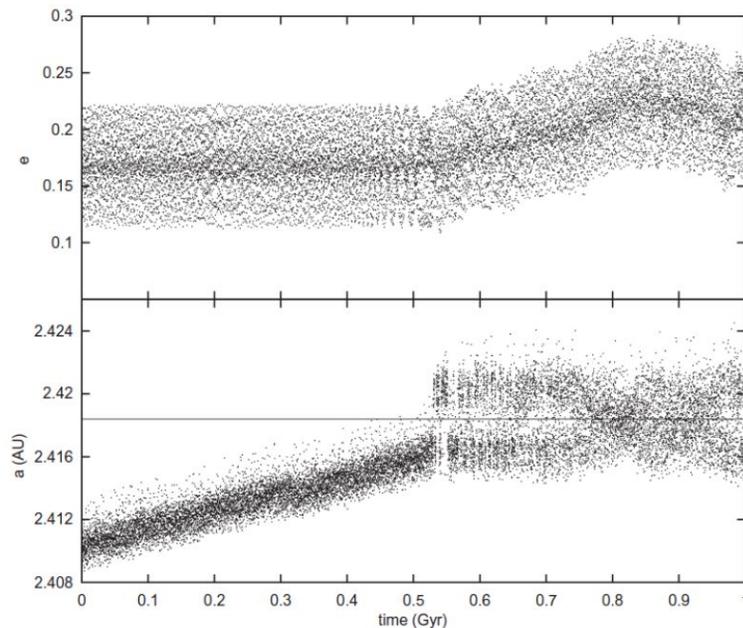


Figure 43: Integración numérica de una partícula con efecto Yarkovsky. El  $a$  crece hasta que es capturada en una resonancia cuya localización exacta esta indicada con la linea horizontal. El efecto Yarkovsky sigue actuando pero como la resonancia impide que  $a$  crezca la  $e$  sufre un crecimiento. Notar que la mayor parte del tiempo la partícula esta en sticking. Fuente Gallardo et al. (2011).

movimientos resonantes en regiones estables del espacio de fase. Las resonancias que se van a manifestar capturando objetos son aquellas que son fuertes. En general la fuerza de una resonancia es mayor cuanto mayor es la  $e$  del objeto resonante y en esos casos la amplitud de la libración puede ser grande así como la frecuencia de libración. Este estado de vibración orbital es lo que ofrece una resistencia al cambio frente a otras perturbaciones. Modestia aparte, dos buenas introducciones a las resonancias están en Gallardo (2016, 2018). Ver el sitio [sites.google.com/view/mmresonances/](https://sites.google.com/view/mmresonances/) con varios recursos, códigos y bibliografía. Un desarrollo muy completo de los diferentes tipos de resonancias se encuentra en Lemaître (2010).

## 6.2 Términos resonantes para bajas ( $e, i$ )

En régimen de bajas ( $e, i$ ) podemos utilizar los primeros términos de la función perturbadora general dada en la sección 2.4. El termino resonante de menor orden (dinamicamente es el mas relevante) sera del tipo

$$f(a, a_p) e^{|j_3|} e_p^{|j_4|} s_p^{|j_5|} s_p^{|j_6|} \cos(k\lambda - k_p\lambda_p + j_3\varpi + j_4\varpi_p + j_5\Omega + j_6\Omega_p) \quad (142)$$

y como debe verificarse que  $|k - k_p| = |j_3 + j_4 + j_5 + j_6| \leq |j_3| + |j_4| + |j_5| + |j_6|$  entonces el mínimo orden del termino resonante sera  $q = |k - k_p|$  y habrá otros términos de orden superior (menos relevantes). Ejemplo: en la resonancia 3:1 no puede haber términos de orden 1, son de orden 2 y superiores. En general entonces, siempre que las resonancias puedan ser descritas por términos del tipo (142), las resonancias mas relevantes dinamicamente serán las de orden bajo. El termino que contiene  $(2\lambda - 6\lambda_p)$  también pertenece a la 3:1 pero la suma de los  $j$  deberá ser por lo menos 4 y por lo tanto sera de 4to orden y menos relevante.

A su vez como  $|j_5 + j_6|$  debe ser par se deduce que la inclinación solo aparece como factores de orden 2, 4, 6 o superiores y por lo tanto los términos que involucran inclinación son menos relevantes que los que involucran excentricidades pues estos pueden ser de orden 1. Según

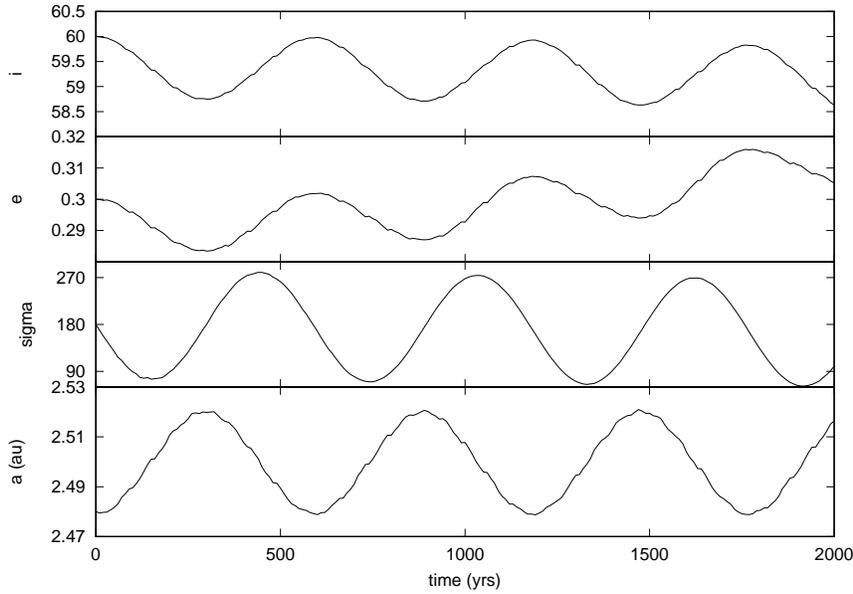


Figure 44: Típica evolución de asteroide en resonancia mostrando la oscilación en los elementos orbitales y en el ángulo crítico  $\sigma$  (en esta figura  $\sigma$  fue definido con signo contrario). Fuente: Gallardo (2019b).

como sean los términos dominantes en una resonancia se las conoce como resonancias tipo excentricidad, tipo inclinación y mixtas.

### 6.3 Aproximación analítica: caso plano y bajas $e$

Vamos a comenzar con un caso sencillo: caso plano de un asteroide perturbado por planeta en órbita circular. En este caso, de acuerdo al desarrollo Laplaciano de la función perturbadora, los principales términos resonantes son

$$R = f(a, e) + g(a, e) \cos(k\lambda - k_p\lambda_p - (k - k_p)\varpi) \quad (143)$$

donde  $f, g$  son funciones conocidas. Como dijimos, un parámetro importante es el **orden** de la resonancia que es igual a  $q = |k - k_p|$  y es importante pues en general la **fuerza** de una resonancia es proporcional a  $e^q$  pues por la forma del desarrollo de  $R$  tenemos que la función  $g$  es proporcional a  $e^q$ , y como veremos la función  $g$  define la fuerza de la resonancia, lo cual es razonable pues es lo que define la amplitud del término resonante.

En caso de considerar un planeta no circular,  $e_p \neq 0$ , entonces aparecen otros términos que generan **modos forzados** superpuestos a la solución, ver Murray and Dermott (1999, 8.4). Pasando al espacio de fase extendido el Hamiltoniano queda

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2\Lambda^2} + n_p\Lambda_p - R(\Lambda, \Gamma, \lambda, \gamma, \lambda_p) \quad (144)$$

ya en variables canónicas de Poincare, que en realidad son

$$\begin{aligned} \Lambda &= L, & \lambda \\ \Gamma &= L - G, & \gamma = -\varpi \\ \Lambda_p, & & \lambda_p \end{aligned} \quad (145)$$

Pero las tres variables angulares aparecen solo en la combinación  $\sigma = k\lambda - k_p\lambda_p - (k - k_p)\varpi$  de variación lenta conocida como **ángulo crítico** pues de su evolución dependerá la dinámica

del asteroide. Conviene entonces hacer una transformación canónica donde la nueva variable angular sea  $\sigma$ . Esto está muy bien explicado en Lei and Li (2020). Una transformación posible es

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Lambda/k, & \sigma &= k\lambda - k_p\lambda_p - (k - k_p)\varpi \\ U &= \Gamma + \Lambda(k_p - k)/k, & u &= \gamma = -\varpi \\ \Phi_3 &= \Lambda_p + \Lambda k_p/k & \lambda_p &\end{aligned}\quad (146)$$

La única variable rápida que tenemos ahora es  $\lambda_p$  que en realidad ya no aparece en el Hamiltoniano pues hemos eliminado todos los términos de corto periodo por lo tanto tenemos  $\Phi_3$  constante, lo que permite expresar  $\Lambda_p(\Phi_3, \Lambda)$  y sustituirla en el Hamiltoniano. El Hamiltoniano expresado en las nuevas variables y despreciando el término constante que depende de  $\Phi_3$  queda

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2(k\Sigma)^2} - n_p k_p \Sigma - f(\Sigma, U) - g(\Sigma, U) \cos(\sigma) \quad (147)$$

Como la variable  $\varpi$  (formalmente  $u$ ) no está en el Hamiltoniano entonces se verifica que  $U$  es constante y esto establece una relación entre  $(\Gamma, \Lambda)$ , o sea entre  $(a, e)$ , del asteroide en la resonancia. O sea que la evolución  $a(t)$  y  $e(t)$  están correlacionadas en el movimiento resonante (figura 44). Ver que el sistema pasa a tener un grado de libertad y puede resolverse analíticamente en las variables  $(\Sigma, \sigma)$ . Con la solución de  $\Sigma(t)$  tengo  $a(t)$  y sabiendo que  $U$  es constante obtengo la evolución de la  $e(t)$ . Si hubiésemos considerado la excentricidad del planeta perturbador entonces aparecerían otros términos: uno secular y otro resonante, que agregan modos forzados a la evolución del asteroide. La larga historia de este modelo, conocido como **segundo modelo fundamental de resonancias** (SFMR) está muy bien sintetizada en Lei and Li (2020). El primer modelo fundamental es el del péndulo que vimos en la sección 3.11, comparar los Hamiltonianos (147) y (64). Las ecuaciones canónicas quedan

$$\frac{d\Sigma}{dt} = -g \sin(\sigma) \quad (148)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = nk - n_p k_p - \frac{\partial f}{\partial \Sigma} - \frac{\partial g}{\partial \Sigma} \cos(\sigma) \quad (149)$$

Interesa ver los puntos de equilibrio del sistema resonante (los centros de la resonancia) y para eso buscamos los puntos en los cuales  $\dot{\Sigma} = \dot{\sigma} = 0$  y esto conduce a que ocurren para  $\sigma = 0, 180$  (este modelo falla en las resonancias externas tipo 1:N pues la  $R$  no puede representarse por un simple coseno). Si en una integración numérica obtenemos que cierto  $\sigma$  oscila en torno de cierto punto de equilibrio entonces estamos en presencia de una resonancia, el ángulo crítico  $\sigma$  se utiliza como diagnóstico de la resonancia.

En la ec. (149) se puede ver que en este modelo la condición  $\dot{\sigma} = 0$  no ocurre para el semieje dado por la resonancia nominal  $nk = n_p k_p$  sino que depende de la excentricidad a través de los 2 últimos términos dependientes de  $(f, g)$ . Esto da lugar a la **ley de estructura** que muestra la dependencia  $a(e)$  para la resonancia exacta, especialmente notoria en bajas excentricidades y para resonancias de orden 1. Calculando las curvas de nivel del  $\mathcal{H}(\sigma, \Sigma)$  se pueden deducir las separatrices y los anchos de la resonancia en función de la excentricidad de la partícula resonante. Ver ejemplos en las figuras 8, 46 y 50. En la figura 45 se muestra la ley de estructura y los límites de la resonancia en el plano  $(a, e)$ . La amplitud de las libraciones en  $\Sigma$  son proporcionales a  $g$  por eso se suele llamar **fuerza** de la resonancia al factor  $g$  en  $R$ , o sea a su semi-amplitud (Gallardo, 2006). Esta función perturbadora *de juguete* (o *toy model*) consistente en un único término en  $\cos(\sigma)$  es muy limitada en su validez (especialmente

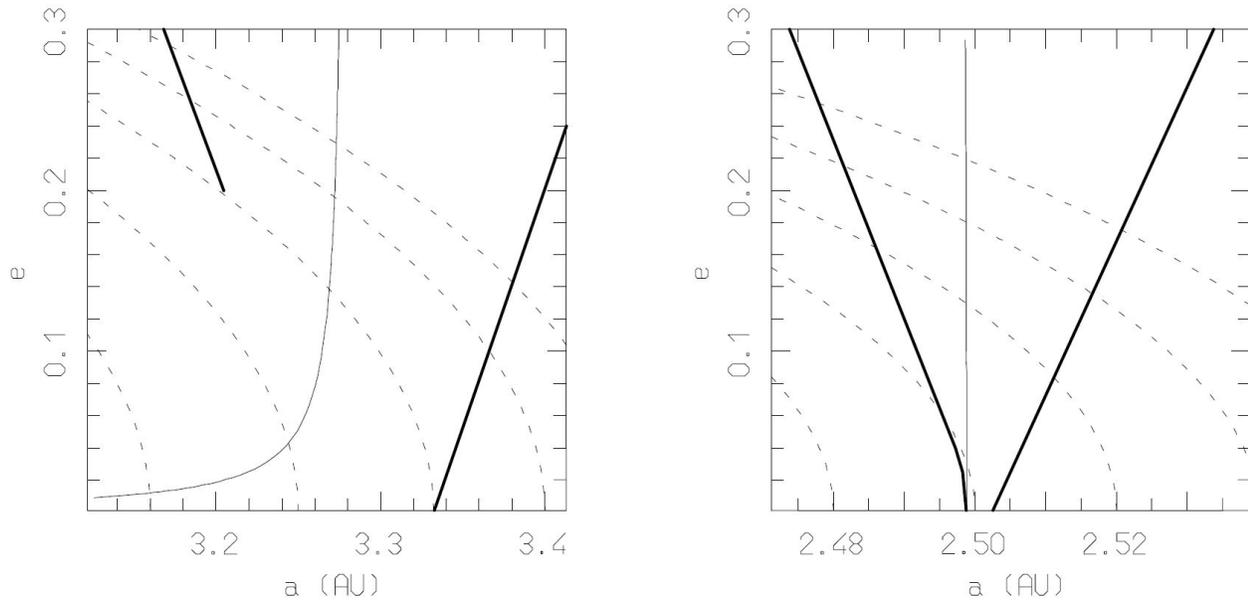


Figure 45: Separatrices en el espacio  $(a, e)$  para el caso plano de las resonancias 2:1 (izquierda) y 3:1 (derecha) con Júpiter. Ver la ley de estructura en la 2:1 y la ausencia de separatriz en el tramo inferior izquierdo. Las libraciones ocurren siguiendo las líneas punteadas. Fuente Morbidelli (2002a).

falla en la resonancias exteriores 1:N conocidas como *asimétricas* pues los puntos de equilibrio son  $\sigma \neq 0, 180$  y dependen de  $e$ ) pero permite una descripción global de la topología del movimiento resonante. Ver por ejemplo Malhotra (1998, cap 5.3). Un estudio bien detallado y poco pedagógico del caso plano se encuentra en Morbidelli (2002a, cap 9) y el tema tratado en forma aún menos pedagógica esta en Murray and Dermott (1999, cap. 8). Mmmmm... capaz que lo mas conveniente es ver Lemaître (2010).

La principal desventaja de este SFMR es que no es capaz de describir adecuadamente todas las resonancias por la simpleza del termino resonante limitado a  $\cos(\sigma)$ . Como decíamos, este SFMR en realidad fue precedido históricamente por uno mas simple aun del tipo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Sigma^2 - \cos(\sigma) \quad (150)$$

que es el Hamiltoniano del péndulo. En este Hamiltoniano las variables están separadas y se pueden integrar analíticamente. Se conoce como el modelo ideal de resonancia o **primer modelo fundamental de resonancia**.

### 6.4 Aproximación semianalítica espacial

Las limitaciones de lo que acabamos de ver en la sección anterior se deben a las aproximaciones adoptadas en la expresión de  $R$  que la hacen válida solo para bajas  $e$ . Para lograr una mejor representación de la resonancia buscaremos mejorar la expresión del término resonante en el Hamiltoniano. Para el caso espacial trabajando en las variables canónicas de Poincaré  $(L, L - G, G - H, \lambda, -\varpi, -\Omega)$  y dado que el Hamiltoniano depende de la posición del planeta a través de  $\lambda_p$  al igual que en la sección anterior pasamos al espacio de fase extendido con el nuevo par de variables  $(\Lambda_p, \lambda_p)$  y el Hamiltoniano queda:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_p \Lambda_p - R(L, L - G, G - H, \lambda, -\varpi, -\Omega, \lambda_p) \quad (151)$$

La dependencia espacial está en la  $R$ . Para no usar una aproximación por desarrollo en serie de  $R$  la calcularemos numéricamente y para poder lograr eso la hipótesis fundamental de este modelo (Gallardo, 2006, 2020b) es asumir que durante el movimiento resonante las variables  $(\varpi, \Omega)$  son constantes. Esto implica imponer que el Hamiltoniano es independiente de los momentos  $(L - G, G - H)$ . Veremos que implica esto en la formulación de la teoría, básicamente estamos eliminando dos grados de libertad. Si son constantes ya no son variables a resolver, son parámetros por lo que el Hamiltoniano será

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_p \Lambda_p - R(L, \lambda, \lambda_p) \quad (152)$$

Como  $\varpi$  es constante en este modelo la combinación resonante que interesa separar como nueva variable es  $\theta = k\lambda - k_p \lambda_p$  así que hacemos la transformación canónica

$$\begin{aligned} \Sigma &= L/k, & \theta &= k\lambda - k_p \lambda_p \\ \Gamma &= k_p L/k + \Lambda_p, & \lambda_p & \end{aligned} \quad (153)$$

Se puede verificar que es canónica comprobando la transformación de contacto  $\Sigma\theta + \Gamma\lambda_p = L\lambda + \Lambda_p \lambda_p$ . El Hamiltoniano queda

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2(k\Sigma)^2} - n_p \Lambda_p(\Sigma, \Gamma) - R(\Sigma, \theta, \lambda_p) \quad (154)$$

La variable rápida  $\lambda_p$  solamente está presente en  $R$  y la eliminaremos haciendo una media numérica (atención: punto crucial, ya lo veremos), en consecuencia desaparece y su momento conjugado  $\Gamma$  pasa a ser constante por lo que el término  $n_p \Lambda_p$  es

$$n_p(\Gamma - k_p L/k) = n_p \Gamma - n_p k_p \Sigma \quad (155)$$

y como el primer término es constante, no contribuye al Hamiltoniano, lo eliminamos y queda

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2(k\Sigma)^2} - n_p k_p \Sigma - \mathcal{R}(\Sigma, \sigma) \quad (156)$$

donde  $\mathcal{R}$  es  $R$  promediada en  $\lambda_p$  pero manteniendo el link  $\sigma$  constante. Parece un Hamiltoniano muy elemental, sin embargo permite el estudio de resonancias con inclinación y excentricidad arbitrarias pues no usaremos un desarrollo en serie para  $R$  sino que la calcularemos numéricamente a partir de su definición en coordenadas rectangulares dada por la ec. (14).

### 6.4.1 Cálculo numérico de $\mathcal{R}$

La función perturbadora resonante en este modelo depende de las variables  $(\Sigma, \sigma)$  (o  $(a, \sigma)$ ) y de los parámetros  $(e, i, \omega, \Omega)$ . La verdadera forma de  $\mathcal{R}$  para  $(e, i)$  arbitrarias es bien diferente del modelo sinusoidal simplificado que se podría deducir del desarrollo Laplaciano. En Gallardo (2006) se muestran varios ejemplos. El desarrollo analítico de  $\mathcal{R}(a, e, i, \omega, \sigma)$  válido para  $(e, i)$  arbitrarios es el colmo de los dolores de cabeza. Históricamente se han ofrecido desarrollos válidos para bajas  $(e, i)$  o para el caso  $i = 0$ . En los últimos años los desarrollos de Lei (2019) y Namouni and Morais (2020) han logrado una buena descripción de algunas resonancias para inclinaciones arbitrarias aunque para  $e < 0.6$ . Además se hace evidente que para altas  $(e, i)$  una resonancia no tiene un único ángulo crítico sino una cantidad de combinaciones del tipo de la fórmula (24) todas verificando  $j_1\lambda_1 + j_2\lambda_2 = k\lambda - k_p\lambda_p$  y cada ángulo crítico genera una dinámica diferente. El hecho de que sean necesarios muchos términos para representar  $\mathcal{R}$  es una indicación que la representación analítica es mala si no imposible. Por estas dificultades se han propuesto algunas alternativas para obtener  $\mathcal{R}$  como la media numérica de  $R$  (Schubart, 1964, 1968, 1978) o como un desarrollo en serie de Taylor en torno de un valor arbitrario  $(a, e, i)$  donde los coeficientes de ese desarrollo se calculan numéricamente (Ferraz-Mello and Sato, 1989; Roig et al., 1998). Ver también Moons (1994) para una implementación híbrida con ambos enfoques. Por ambas vías el caso plano en un gran rango de excentricidades fue estudiado con gran detalle obteniéndose las curvas de nivel del Hamiltoniano con forma de bananas así como la localización de las separatrices mostrando la peculiaridad de algunas resonancias de primer orden que en cierta región del plano  $(a, e)$  carecen de separatrices como se muestra en la figura 45.

En el caso general el método de Schubart (**Schubart averaging**) propone dejar fijos  $(\Sigma, U, \sigma, \omega)$  al hacer la integral numérica de  $R$  en  $\lambda_p$  y explorando en el espacio de esas cuatro variables se puede tener una idea de la localización de puntos de equilibrio y forma de las superficies de  $\mathcal{H} = cte$ . De nuevo, para el caso plano la cosa se simplifica pues desaparece  $\omega$  y  $U$  resulta una constante por lo que queda  $\mathcal{R}(\Sigma, \sigma)$  que genera un  $\mathcal{H}(\Sigma, \sigma)$  (Schubart, 1964). Pero en el caso general espacial el análisis es complicado y para facilitar el análisis y en particular para estimar las fuerzas de las resonancias (semiamplitud de  $\mathcal{R}$ ) Gallardo (2006) propone usar

$$\mathcal{R}(a, e, i, \sigma, \omega) \simeq \mathcal{R}(a_0, \sigma) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} R(\lambda_p, \lambda(\lambda_p, \sigma)) d\lambda_p \quad (157)$$

lo que implica que  $\mathcal{R}$  solo dependa de  $\sigma$  y todo lo demás son parámetros fijos en el cálculo de la integral. O sea, en la integral a la hora de evaluar la  $R$  dada por ec. (14) imponemos que siempre  $a = a_0$ , el valor nominal de la resonancia. La integral la calculamos fijando un  $\sigma$  y variando  $\lambda_p$  entre 0 y  $2\pi k$  que es el lapso al cabo del cual las configuraciones Sol-asteroide-planeta se repiten. La integral se calcula evaluando punto a punto  $R$ : para cierto  $\sigma$  fijo, dado  $\lambda_p$  calculo  $\lambda(\lambda_p, \sigma)$  a partir de  $\sigma = k\lambda - k_p\lambda_p - (k - k_p)\varpi$  y a partir de las longitudes calculo las posiciones geométricas y evalúo  $R$ . Esto implica que en el cálculo de  $R$  asumimos que  $\sigma$  se mantiene constante al variar  $\lambda_p$  o sea asumimos que el asteroide está en la resonancia exacta (manteniendo  $\sigma$  constante). De esta forma  $\mathcal{R}(\sigma)$  es una función obtenida numéricamente solo de  $\sigma$  que también depende de los  $(e, i, \omega)$  como parámetros. Asumir que  $\mathcal{R}$  es independiente de  $a$  para una dada resonancia es una aproximación cruda, sin embargo el método da una buena estimación de las propiedades de las resonancias con excepción algunas resonancias con asimetrías en la separatriz en las regiones de bajas excentricidades (debido a que en bajas  $e$  los  $\varpi$  varían bastante). Por otro lado notar que en la ec. (156) la dependencia de  $R$  con  $a$  está factorizada por la masa del planeta perturbador mientras que en los otros términos del hamiltoniano está factorizado por la masa de la estrella central, y en estos términos no se despreciara la dependencia con  $a$  como veremos. A pesar

de esta simplificación, para describir resonancias en altas  $(e, i)$  resulta muy útil. La región de muy bajas excentricidades ha sido recientemente reinvestigada para el caso plano (Malhotra and Zhang, 2020; Lei and Li, 2020). La semiamplitud de  $\mathcal{R}$  calculada numéricamente nos da la fuerza de la resonancia y en Gallardo (2019b) se muestra que para bajas  $(e, i)$  sigue el comportamiento dado por el desarrollo Laplaciano dado por ec. (25), es decir es proporcional a  $e^{|j_3|} s^{|j_5|}$ , donde los  $j_i$  son los enteros que multiplican a  $\varpi$  y  $\Omega$ . Para altas  $(e, i)$  en cambio se pierde esa relación lo cual es debido a las limitaciones del desarrollo Laplaciano. Estas fuerzas numéricas pueden verificarse con **mapas dinámicos** como veremos mas adelante.

#### 6.4.2 Hamiltoniano y ecuaciones de movimiento

Al considerar  $(e, i, \omega)$  como parámetros las únicas variables serian  $(a, \sigma)$ . Si construimos curvas de nivel de  $\mathcal{H}(a, \sigma)$  vamos a ver los puntos de equilibrio estables e inestables, las oscilaciones en torno a los estables, las separatrices y a su vez estas definirán el ancho  $\Delta a$  de la resonancia. Entonces los mapas los calculamos con

$$\mathcal{H}(a, \sigma) = -\frac{\mu}{2a} - n_p \frac{k_p}{k} \sqrt{\mu a} - \mathcal{R}(a_0, \sigma) \quad (158)$$

y en la figura 46 tenemos un ejemplo. Tenemos un código en fortran `Hasigma.f` que permite calcular curvas de nivel de este Hamiltoniano. Y la forma de la  $\mathcal{R}(\sigma)$  esta dada por el código `Resonalyzer.f`. La resonancia impone oscilaciones en  $(a, \sigma)$  en torno a puntos de equilibrio. Se puede ver que lejos del valor  $a = a_0$  las curvas están separadas por encima y por debajo. Pero en las proximidades tenemos curvas cerradas que encierran los puntos de equilibrio. Las partículas que siguen esas curvas cerradas se dice que están en resonancia, el angulo critico,  $\sigma$ , oscila. En cambio las partículas que muestran  $\sigma$  creciente o decreciente sistemáticamente están fuera, aunque cerca, de la resonancia. Las trayectorias de la parte superior se realizan en el sentido opuesto al de la inferior. Hay una diferencia dinámica fundamental entre estar en la zona de libración y estar fuera: si esta en libración, ante una pequeña perturbación externa la amplitud de libración cambiará pero el valor medio de  $a$  seguirá siendo el mismo mientras que fuera de la zona de libración la perturbación hace saltar el semieje hacia otros valores.

Para conocer la evolución temporal de  $(a, \sigma)$  debemos resolver las ecuaciones canónicas:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \quad (159)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Sigma} \quad (160)$$

Pero

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{\sqrt{\mu/a}}{2k} \frac{da}{dt} \quad (161)$$

y a su vez

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} \quad (162)$$

entonces la ecuación para el semieje queda

$$\frac{da}{dt} = \frac{2k}{\sqrt{\mu/a}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} \quad (163)$$

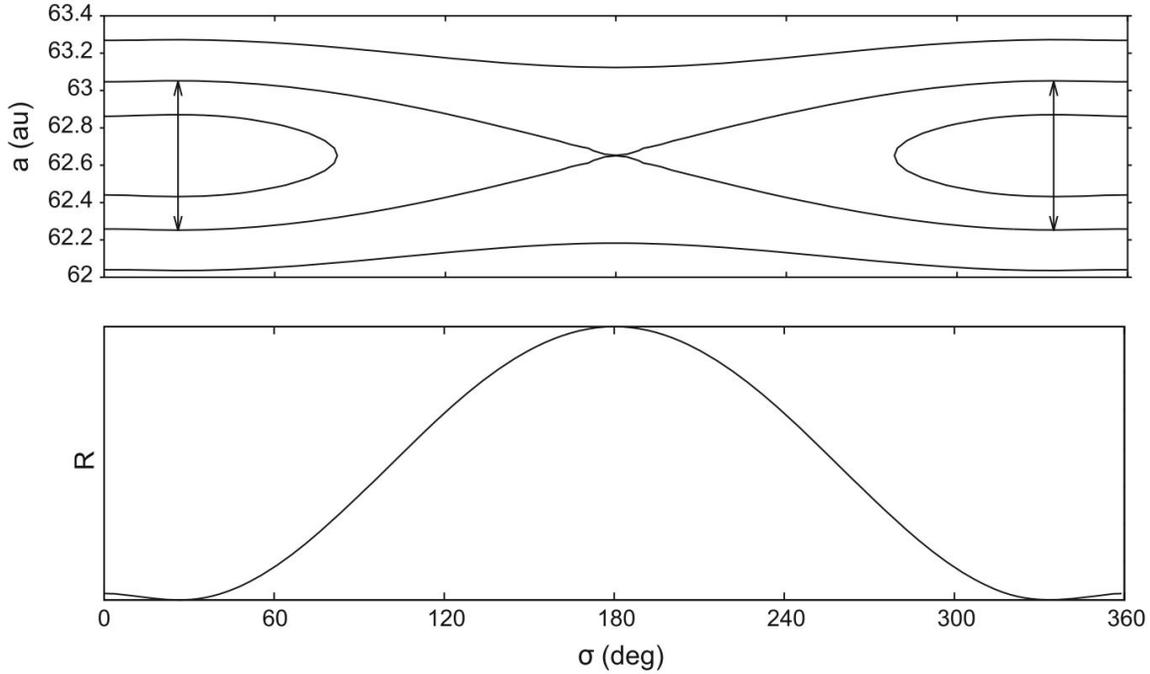


Figure 46: Arriba: curvas de nivel del  $\mathcal{H}(a, \sigma)$  para la resonancia 1:3 con Neptuno asumiendo  $e = 0.7, i = 90, \omega = 0$ . La separatriz es la curva que se corta a si misma y separa la región resonante de la no resonante. Las flechas indican el ancho de la resonancia. Abajo:  $\mathcal{R}(a_0, \sigma)$ . (Gallardo, 2020b).

y de aquí que los efectos resonantes en  $a$  son importantes cuando  $\mathcal{R}$  tiene una fuerte dependencia con  $\sigma$ . O sea, una gran amplitud en  $\mathcal{R}(\sigma)$  es indicativo de resonancia fuerte con importantes efectos en  $a$ . Por el contrario, si  $\partial\mathcal{R}/\partial\sigma \sim 0$  la resonancia será débil.

De la otra ecuación canónica tenemos

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Sigma} = \frac{\mu^2}{2k^2} 2\Sigma^{-3} - n_p k_p = nk - n_p k_p \quad (164)$$

lo cual es trivial pues sale de la definición del ángulo crítico (asumiendo  $\varpi$  constante). De aquí sale una relación interesante

$$nk = \sqrt{\mu/a^3} k = \dot{\sigma} + n_p k_p \quad (165)$$

lo que nos dice que cuando el ángulo crítico crece más rápido  $a$  está en un mínimo y cuando decrece más rápido  $a$  estará en el máximo. En la figura 44 se muestra lo contrario pues  $\sigma$  fue definido con signo contrario (ambigüedad muy típica en la literatura).

#### 6.4.3 Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio están en

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{da}{dt} = 0 \quad (166)$$

La ecuación  $d\sigma/dt = 0$  no aporta mucho pues lo que se obtiene es que  $a = a_0$ , es decir que el centro de la resonancia está en el valor del semieje nominal de la resonancia (merece dejar constancia que a veces las resonancias reales están un poco corridas del valor nominal  $a_0$ , quizá debido al efecto secular del planeta en anomalía media como lo indica la ec. 13). Y la otra nos dice que los puntos de equilibrio están en  $\partial\mathcal{R}/\partial\sigma = 0$ . O sea, los puntos de equilibrio están en

$$a = a_0$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} = 0$$

Aplicando los resultados para el caso pendular en la sección 3.11 tenemos que los periodos de las pequeñas oscilaciones en los puntos de equilibrio son

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{H}_{\Sigma,\Sigma}\mathcal{H}_{\sigma,\sigma}}} \quad (167)$$

De acuerdo a nuestro modelo tenemos

$$\mathcal{H}_{\sigma,\sigma} = -\frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \sigma^2} \quad (168)$$

$$\mathcal{H}_{\Sigma,\Sigma} = -\frac{\mu^2}{k^2} 3\Sigma^{-4} = -3\frac{k^2}{a^2} \quad (169)$$

entonces el periodo de las pequeñas oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio es

$$T = \frac{a}{k} \frac{2\pi}{\sqrt{3\mathcal{R}_{\sigma,\sigma}}} \quad (170)$$

donde  $\mathcal{R}_{\sigma,\sigma}$  es la derivada segunda en  $\sigma$  calculada numéricamente en el punto de equilibrio estable, o sea en un mínimo ( $\mathcal{R}_\sigma = 0, \mathcal{R}_{\sigma,\sigma} > 0$ ). Puede haber varios puntos de equilibrio estable y cada uno con periodo diferente. Ver que la frecuencia de libración es proporcional a la raíz cuadrada de la concavidad de  $\mathcal{R}$  en el mínimo, cuanto mas empinado el mínimo mas alta la frecuencia por lo que alta frecuencia (corto periodo de libración) esta asociado a resonancia mas fuertes y puntos mas estables (aunque a veces un punto de equilibrio profundo puede estar rodeado de singularidades y por lo tanto el equilibrio es prácticamente imposible). Esta metodología se puede aplicar al estudio de los puntos Lagrangianos en la 1:1 y es interesante ver cómo L4 y L5 que en la teoría del problema restringido circular están a 60 grados del planeta en el caso general con cuerpos excéntricos e inclinados se desplazan por el espacio (Pan and Gallardo, 2025).

#### 6.4.4 Ancho de resonancia

Una teoría en variables canónicas e invariantes adiabaticos (ver sección 6.5) para el caso plano fue desarrollada en Morbidelli and Moons (1993); Moons and Morbidelli (1995) y extendida luego para estudiar resonancias seculares en el caso espacial. También fue aplicada para la región TN en Morbidelli et al. (1995) pero puede verse sinteticamente explicada en Saillenfest et al. (2016). Aqui lo veremos por nuestro camino mas simplificado. El semiancho  $\Delta a$  de una resonancia es la mitad de la máxima variación en semieje existente entre las separatrices que limitan la zona de libración en torno del punto de equilibrio estable (ver figuras 46 y 50). O también es la distancia en  $a$  entre el punto de equilibrio estable  $\sigma_E$  (que siempre esta en  $a_0$ ) y el punto por el que pasa la separatriz en  $(\sigma_E, a_{sep} = a_0 + \Delta a)$ . Por pertenecer al mismo nivel se cumple

$$\mathcal{H}(a_{sep}, \sigma_E) = \mathcal{H}(a_0, \sigma_I) \quad (171)$$

y este ultimo lo conozco mientras que el primero no pues no conozco  $a_{sep}$ . Si llamo  $\Delta \mathcal{H} = \mathcal{H}(a_{sep}, \sigma_E) - \mathcal{H}(a_0, \sigma_E)$ , o sea la variación del Hamiltoniano al variar  $a$  manteniendo constante  $\sigma$

en el valor correspondiente al punto de equilibrio estable. Entonces, moviéndome verticalmente  $\Delta\mathcal{H}$  es independiente de  $\sigma$  y solo depende de  $a$ , puedo aproximar

$$\Delta\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial a^2}\frac{(\Delta a)^2}{2} + \dots \quad (172)$$

la idea es evaluar esas derivadas en el punto de equilibrio estable y allí la derivada primera es nula así que tendremos

$$\Delta\mathcal{H} = \mathcal{H}(a_{sep}, \sigma_E) - \mathcal{H}(a_0, \sigma_E) = \mathcal{H}(a_0, \sigma_I) - \mathcal{H}(a_0, \sigma_E) = \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial a^2}\frac{(\Delta a)^2}{2} \quad (173)$$

El lado izquierdo es

$$\mathcal{R}(\sigma_E) - \mathcal{R}(\sigma_I)$$

mientras que

$$\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial a^2} = -\frac{3}{4}n^2$$

de donde finalmente el semiancho de la resonancia es

$$\Delta a = \frac{\sqrt{8/3}}{n}\sqrt{\Delta\mathcal{R}} \quad (174)$$

donde  $\Delta\mathcal{R}$  es la amplitud total que muestra  $\mathcal{R}$  entre el máximo y el mínimo. El ancho total sería  $2\Delta a$  en uas.

Estamos en condiciones de calcular para cualquier resonancia los puntos de equilibrio (los mínimos y máximos de  $\mathcal{R}$ ), la fuerza ( $\Delta\mathcal{R}$  o la mitad) los periodos  $T$  de las pequeñas oscilaciones y los semianchos  $\Delta a$  en unidades astronómicas. Esta es la teoría presentada en Gallardo (2020b) y que permite calcular las propiedades de cualquier resonancia para cualquier  $(e, i)$ . Esto lo hace el código `Resonalyzer` y el código `Superatlas` calcula varias resonancias con varios planetas en cierto rango de semiejes. En figura 47 se presenta un atlas de la región TN donde se indican los anchos (estables, ver a continuación) de las resonancias. Cuando se calculan los anchos  $\Delta a(e, i, \omega)$  es posible que resonancias próximas se superpongan, generalmente para altas excentricidades. En ese caso la región se vuelve caótica pues una partícula sentirá los efectos simultáneos de las diferentes resonancias, cada una intentara colocar al asteroide oscilando en torno a su valor nominal y su evolución orbital se vuelve errática, saltando de una resonancia a otra. Las predicciones teóricas sobre en qué condiciones las resonancias se superponen (Ramos et al., 2015) explican los resultados puramente numéricos que pueden obtenerse por ejemplo con mapas dinámicos como el de la figura 48.

Si consideramos que el planeta tiene órbita circular contenida en el plano de referencia tendremos que los anchos de las resonancias son funciones  $\Delta a(e, i, \omega)$ . Entonces, para dados  $(e, i)$  el ancho dependerá del valor de  $\omega$  que puede ser cualquiera. Por eso definimos como **fragilidad** la cantidad

$$f(e, i) = (\Delta a_{max} - \Delta a_{min})/\Delta a_{min} \quad (175)$$

que indica cuanto varia el ancho de la resonancia al cambiar el valor de  $\omega$  entre  $(0, 360)$ . Si la fragilidad es cero quiere decir que la resonancia es insensible a cambios de  $\omega$ . Pero si es alta es posible que un objeto resonante pierda la resonancia en algún momento de su evolución. Ver figura 49.

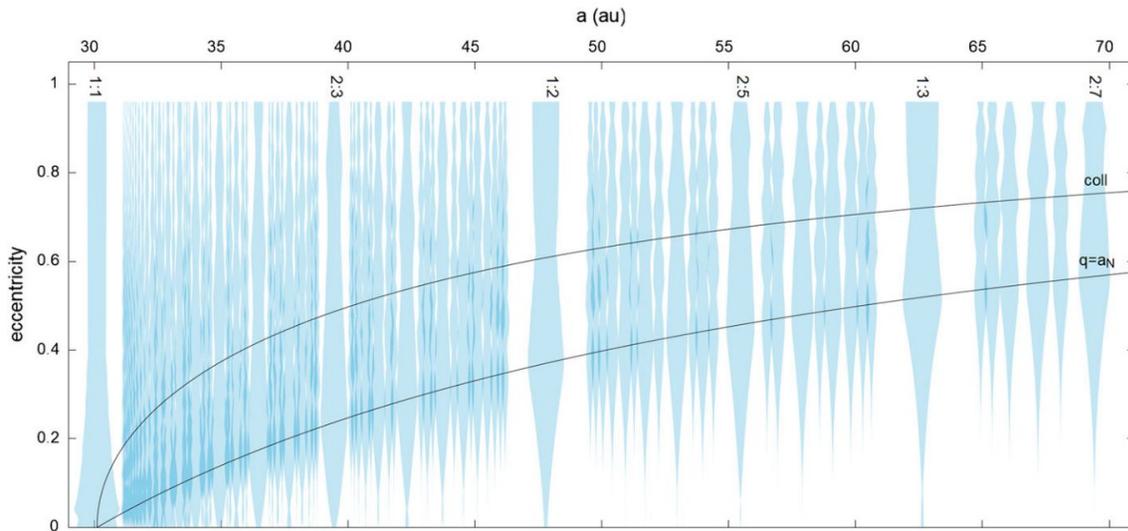


Figure 47: Anchos estables en uas de las resonancias exteriores a Neptuno asumiendo para los objetos  $i = 10^\circ$  y  $\omega = 90^\circ$ . En las regiones oscuras hay superposición de resonancias. (Gallardo, 2020b).

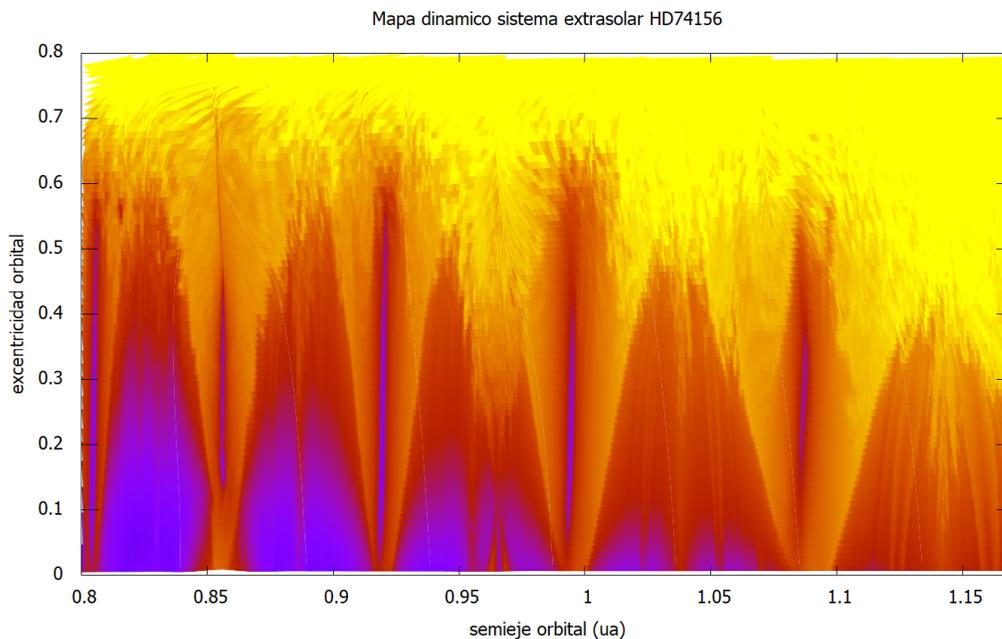


Figure 48: Mapa dinámico mostrando variaciones en semieje del sistema extrasolar HD74156. Se aprecian claramente los anchos en uas en función de la excentricidad y los centros de las resonancias como líneas oscuras (baja amplitud). La región caótica (amarilla) se corresponde con la superposición de resonancias y con resonancias cuyas condiciones iniciales en el mapa correspondieron a puntos inestables.

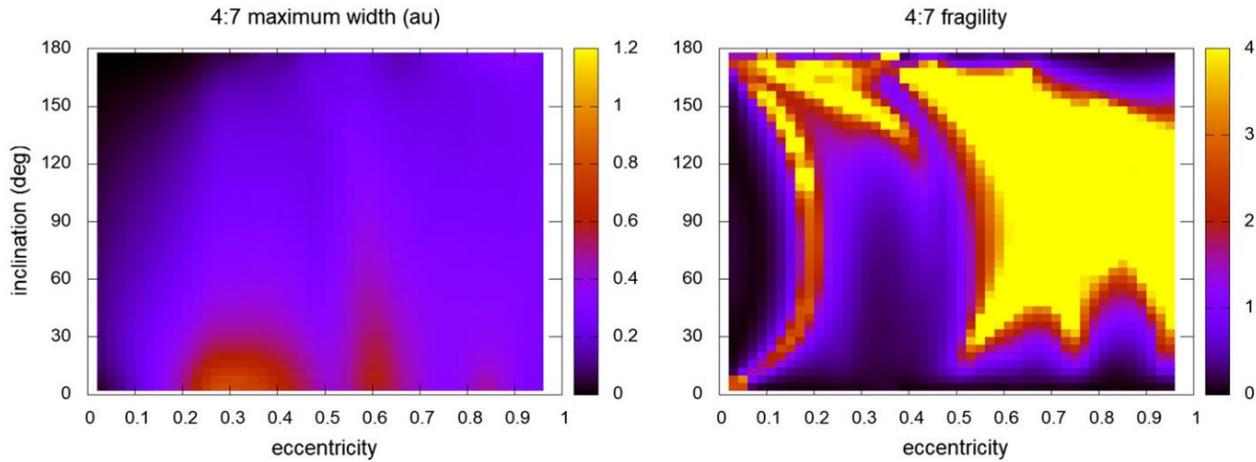


Figure 49: Ancho máximo en uas (izquierda) y fragilidad (derecha) de la resonancia 4:7 con Neptuno. (Gallardo, 2020b).

#### 6.4.5 Anchos estables

Se supone que la resonancia es un mecanismo que protege a la partícula de encuentros con el planeta, pero si la excentricidad es suficientemente grande y  $\sigma$  oscila con suficiente gran amplitud esos encuentros pueden ocurrir. Cuando la órbita de la partícula pasa muy próximo de la órbita del planeta habrá algunos valores de  $\sigma$  para los cuales  $\mathcal{R}$  presenta un pronunciado pico, ver figura 50. Esto ocurre no solo en caso de intersección de la órbita de la partícula y el planeta sino también cuando para algunos  $\sigma$  la distancia mutua es chica. Eso genera picos en  $\mathcal{R}$  y  $\Delta\mathcal{R}$  ya no representa una resonancia estable. No es realista que el movimiento resonante sobreviva a esos picos pues implican encuentros próximos con el planeta que romperá las libraciones. Luego de varias pruebas con mapas dinámicos e integraciones numéricas encontramos empíricamente (Gallardo, 2020b) que si hubo un encuentro a menos de  $3R_{Hill}$  del planeta la libracion se rompe por lo que descartamos todos los valores de  $\mathcal{R}$  obtenidos con encuentros a menos de  $3R_H$ . En realidad para las órbitas directas el limite andaría entre 3 y 4 mientras que para las retrogradadas andaría entre 2 y 3  $R_H$ . Y con el  $\Delta\mathcal{R}$  así determinado ya podemos calcular los anchos  $\Delta a$  estables, es decir el ancho efectivo donde pueden haber libraciones estables sin ser destruidas por encuentros con el planeta. El criterio anda bastante bien en todos los casos con colisión o no pero es posible que varíe según el tipo de resonancia y algún otro factor. Por otro lado este criterio es coherente con trabajos teóricos anteriores (Gladman, 1993). Si no utilizamos este criterio obtendremos anchos muy grandes y la resonancias se superpondrán a partir de cierta excentricidad. Para estas altas excentricidades las partículas saltan de resonancia en resonancia o quedan presas solo si están dentro del ancho estable. Por eso es muy común detectar cometas y centauros saltando de resonancia en resonancia (Fernández et al., 2017; Fernández et al., 2016).

En resumen: los **anchos nominales** son los definidos por las separatrices, los **anchos estables** son menores y definidos por la zona de libracion que evita encuentros a menos de  $3R_{Hill}$  y donde pueden evolucionar objetos capturados en forma estable en la resonancia. Si queremos determinar la región caótica nos van a interesar los anchos nominales y si nos interesa la región estable debemos restringirnos a los anchos estables. Mas claro echale agua.

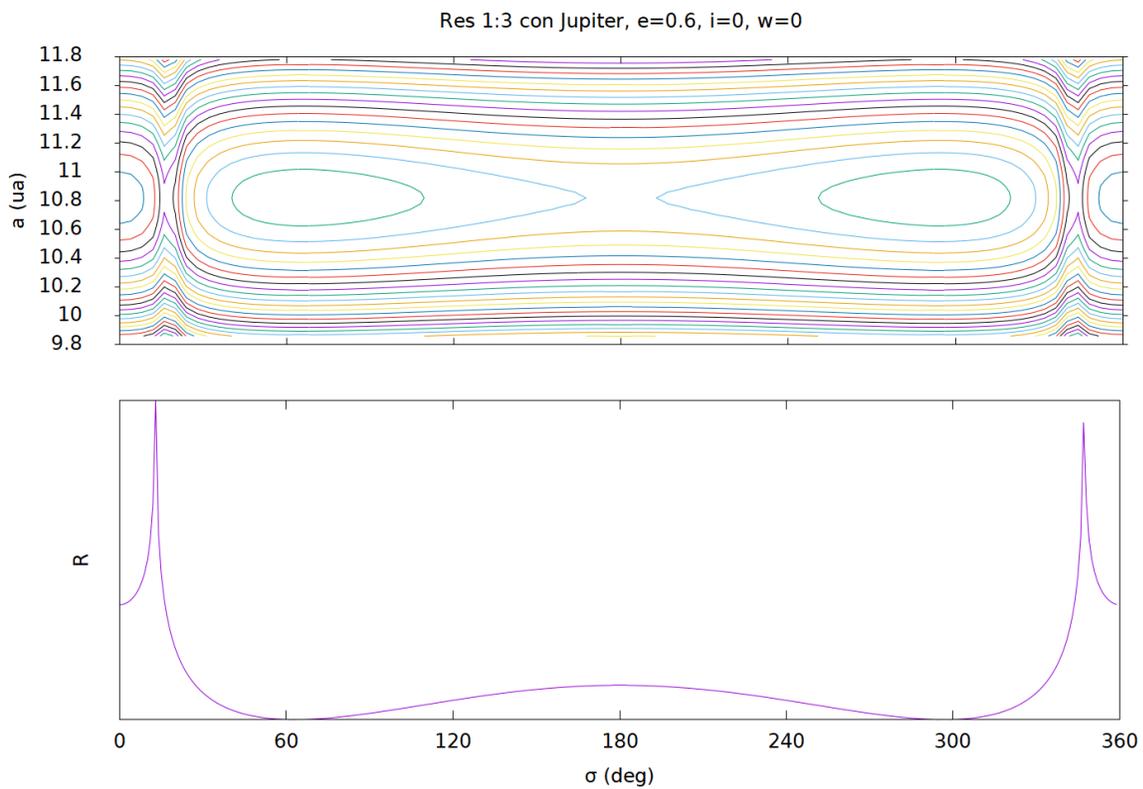


Figure 50: Arriba: curvas de nivel. Con el criterio del descarte de encuentros próximos el ancho total  $2\Delta a$  es 1.1 au. Abajo: función  $\mathcal{R}(\sigma)$  con picos para valores del ángulo crítico  $\sigma$  correspondientes a colisión.

**Ejercicio.** Un asteroide del sistema solar de excentricidad  $e = 0.3$ , inclinación  $i = 10^\circ$  y argumento del perihelio  $\omega = 100^\circ$  parece estar capturado en una resonancia manteniendo su semieje osculante entre 2.80 y 2.85 ua. Calculando un atlas de resonancias en esa región determine de qué resonancia se trata y con qué planeta. Cuál es el ángulo crítico principal y en torno de qué valor puede estar librando? Cuál es el periodo de las libraciones y el ancho en uas de la resonancia? Qué debemos hacer para verificar que efectivamente está capturado en esa resonancia? Nota: utilizar los programas Superatlas y Resonalyzer.

### 6.5 Evolución secular del movimiento resonante

En el largo plazo el planeta (aun suponiéndolo en una órbita fija) genera efectos seculares en el asteroide, como cambios en  $\varpi$  y  $\Omega$  y por lo tanto apartándonos del modelo resonante que asume perihelios y nodos fijos. El estudio de la evolución secular de un movimiento resonante es un problema más sutil que el meramente secular. Puede ser un mecanismo de ZLK dentro de una resonancia (Gallardo et al., 2012; Saillenfest et al., 2017, 2016) o puede ser una resonancia secular dentro de una resonancia de movimientos medios (Morbidelli and Moons, 1993; Moons and Morbidelli, 1995). Ambos mecanismos son responsables por grandes cambios orbitales en  $(e, i)$  que las resonancias de movimientos medios por sí solas no logran generar. Para estos estudios se aplica la teoría de los **invariantes adiabáticos**. La idea es que la evolución secular se realiza en una escala de tiempo muy superior entonces se resuelve el movimiento resonante como vimos antes, con un grado de libertad, y dadas las condiciones iniciales se calcula la acción  $J$ , que de acuerdo a la definición ec. (54) no es otra cosa que el área encerrada por la libración y luego se estudia la evolución secular imponiendo  $J$  constante. La forma de la banana puede cambiar pero su área se preserva a medida que la órbita varía secularmente. Se ha escrito mucho sobre el método desde que Henrard lo propusiera en los 90 pero está muy bien explicado en Saillenfest et al. (2017) quien lo aplica al caso espacial con Neptuno en órbita circular. En Pons and Gallardo (2022) se estudia el caso plano pero para perturbador excéntrico.

Los efectos seculares en un objeto resonante son más dramáticos que en los no resonantes. Podemos entenderlo de la siguiente forma: en el no resonante los efectos seculares son equivalentes a los generados por anillos en cambio en los resonantes la sincronía hace que las figuras en el sistema relativo Sol-partícula no sean anillos sino estructuras más complejas y asimétricas que generan componentes  $(R, T, N)$  sistemáticas que no están presentes para los objetos no resonantes. Estas estructuras en forma de flor (fig. 40) dependerán fuertemente de  $(e, i, \omega)$  y de la resonancia en particular (e intuía que eso es lo que define la fuerza de una resonancia). Por esta razón la dinámica ZLK de un objeto resonante es bien diferente de la de un objeto muy próximo pero no resonante.

Las resonancias seculares dentro de las resonancias de movimientos medios son las principales responsables de la formación de los gaps en el cinturón de asteroides y el mecanismo ZLK dentro de las resonancias el responsable de la existencia de objetos con altas  $(e, i)$  en la región TN (sin considerar otros perturbadores externos). Los gaps se generan porque la excentricidad crece, los asteroides tienen encuentros con los otros planetas, reciben un impulso  $\Delta a$  y salen de la resonancia. Los grupos de asteroides resonantes que sobreviven son aquellos en resonancias con semiejes lejanos a los planetas terrestres y que por lo tanto requieren un muy alto incremento en sus excentricidades para poder ser eliminados (Hildas, Thule, Troyanos).

### 6.6 Anillos

En los anillos tenemos partículas de bajas  $(e, i)$  en resonancias generadas por satélites regulares con  $e_p = i_p = 0$  por lo cual  $j_4 = j_6 = 0$ . Las más importantes son las de orden 1 (fuerza

proporcional a  $e^1$ ) que excitan levemente la excentricidad generando **spiral density waves** (horizontales) y luego las de orden 2 (fuerza con términos  $s^2$ ) que son mas relevantes para partículas con algo de inclinación que generan **spiral bending waves** (verticales) en los anillos. La suma de esos 2 tipos de ondas es lo que genera el aspecto de los anillos. Muy importante: la dinámica resonante de anillos esta afectada fuertemente por el achatamiento planetario, o sea el movimiento medio que define las resonancias no es Kepleriano sino el perturbado por el achatamiento. A estas resonancias se las conoce como resonancias de **Lindblad**.

### 6.7 Resonancia de corrotacion, secundarias y splitting

Si el planeta perturbador es excéntrico es posible que el angulo critico  $\sigma_1 = k\lambda - k_p\lambda_p - (k - k_p)\varpi_p$  también libre lo que implicara que la diferencia de perihelios  $\varpi - \varpi_p$  también oscilara, es decir que el perihelio del asteroide se mantiene oscilando en torno a la dirección del eje de la órbita planetaria (fija, en caso de que no haya otros perturbadores). Esta oscilación se realiza con un periodo diferente y a este movimiento se lo conoce como resonancia de corrotacion o **apsidal corrotation resonance, ACR**, pues las lineas de los apsides oscilan entre si (Michtchenko et al., 2006a). No necesariamente se trata de una resonancia secular y es bastante común en sistemas cuasi coplanares.

También puede ocurrir una **resonancia secundaria** que ocurre cuando el periodo de libracion es conmensurable por ejemplo con el periodo de circulación de nodo o perihelio (y a veces con el angulo sinódico).

Si nos empeñamos en escribir la  $R$  resonante para altas  $(e, i)$  veremos que necesitamos muchos términos resonantes. Cada termino tiene un angulo critico  $\sigma_i$  que contiene la misma combinación resonante de lambdas pero diversas combinaciones de  $(\varpi, \Omega, \varpi_p, \Omega_p)$ . Cada uno de estos términos resonantes tiene soluciones diferentes incluso con  $a_0$  levemente diferentes y el resultado sera una superposición de modos diferentes (subresonancias) lo cual se traduce en una evolución caótica saltando de una subresonancia a otra. La resonancia original se subdivide en varias (**splitting**) todas muy próximas.

### 6.8 Resonancias planetarias

Si entre 2 planetas se cumple  $k_1n_1 - k_2n_2 \sim 0$  con  $(k_1 \leq k_2)$  tenemos resonancia planetaria. Existe una diferencia fundamental entre un asteroide en resonancia con un planeta y dos planetas en resonancia. En la resonancia asteroidal solo el asteroide siente el efecto de la resonancia y sera diferente si es interior o exterior y el angulo critico también es diferente en uno y otro caso. En el caso planetario existe un único angulo critico para ambos planetas que libra en torno de un mismo punto de equilibrio y con el mismo periodo, es una única libracion que vincula ambas órbitas. No se distinguen resonancias externas o internas y la relación de amplitudes de libracion esta dada por

$$\frac{\Delta a_1}{\Delta a_2} \sim \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \quad (176)$$

según Gallardo, T. et al. (2021) en donde desarrollamos un modelo (GBG21) válido para planetas con elementos arbitrarios y en la fig 51 mostramos el caso de la quasi resonancia Júpiter-Saturno. En Pons Vuolo, Juan (2022) se estudia la evolución secular dentro de las resonancias planetarias en el caso plano.

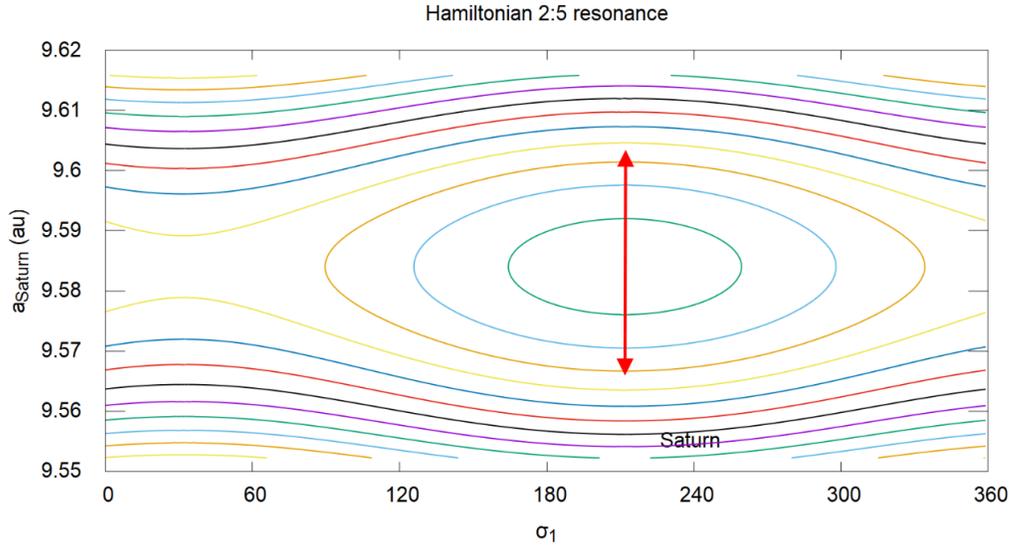


Figure 51: Resonancia 2:5 entre Júpiter y Saturno calculada con el modelo GBG21. El semieje de Saturno esta en coordenadas de Jacobi. Se indica la posición actual de Saturno y su movimiento en el futuro es hacia la izquierda por lo cual su semieje ira aumentando.

### 6.9 Resonancias y migración planetaria

En las etapas de formación de un sistema los planetas migran y en ese proceso pueden capturar a otros planetas en una resonancia. Si tenemos un planeta migrando con cierta tasa en el momento que captura a otro planeta en una resonancia su tasa de migración disminuye pues el planeta con quien se encuentra en resonancia ejerce cierta resistencia proporcional a su masa. Veamos un modelo simplificado. Supongamos que un planeta  $m_2$  pierde o gana momento angular a una cierta tasa  $\dot{L} = m_2 \dot{h}_2$ , donde por ser órbita circular  $h_2 = \sqrt{a_2}$  así que la tasa es

$$\dot{L} = m_2 \frac{\dot{a}_2}{2\sqrt{a_2}} \quad (177)$$

En general esto se modela imponiendo cierta aceleración transversa artificial que genera una tasa  $\dot{a}_2$  replicando aproximadamente lo que seria el efecto de intercambio de momento angular con el disco circunestelar. Pero si en determinado momento el planeta  $m_2$  entra en una resonancia con un planeta  $m_1$  tal que  $k_1 n_1 = k_2 n_2$  entonces el efecto del disco que se sigue aplicando en el planeta  $m_2$  se transfiere en parte a  $m_1$  por el vinculo resonante. Entonces ahora

$$\dot{L} = m_1 \frac{\dot{a}_1}{2\sqrt{a_1}} + m_2 \frac{\dot{a}_2}{2\sqrt{a_2}} = m_2 \frac{\dot{a}_2}{2\sqrt{a_2}} \quad (178)$$

y por el vinculo resonante se debe cumplir  $a_2^3 k_1^2 = a_1^3 k_2^2$  y derivando

$$\dot{a}_1 = \dot{a}_2 \left( \frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} \right)^2 \quad (179)$$

Sustituyendo en 178 se obtiene la nueva tasa  $\dot{a}_2'$  para el planeta  $m_2$  que sera menor a la inicial  $\dot{a}_2$  pues tiene que arrastrar a  $m_1$  que por su vez comenzara a variar con la tasa  $\dot{a}_1$ . En la figura 52 se muestra el resultado de una simulación en donde se impone una aceleración transversa en el planeta  $m_2$  el cual migra, captura al planeta  $m_0$  y luego este captura a  $m_1$ . En ningún

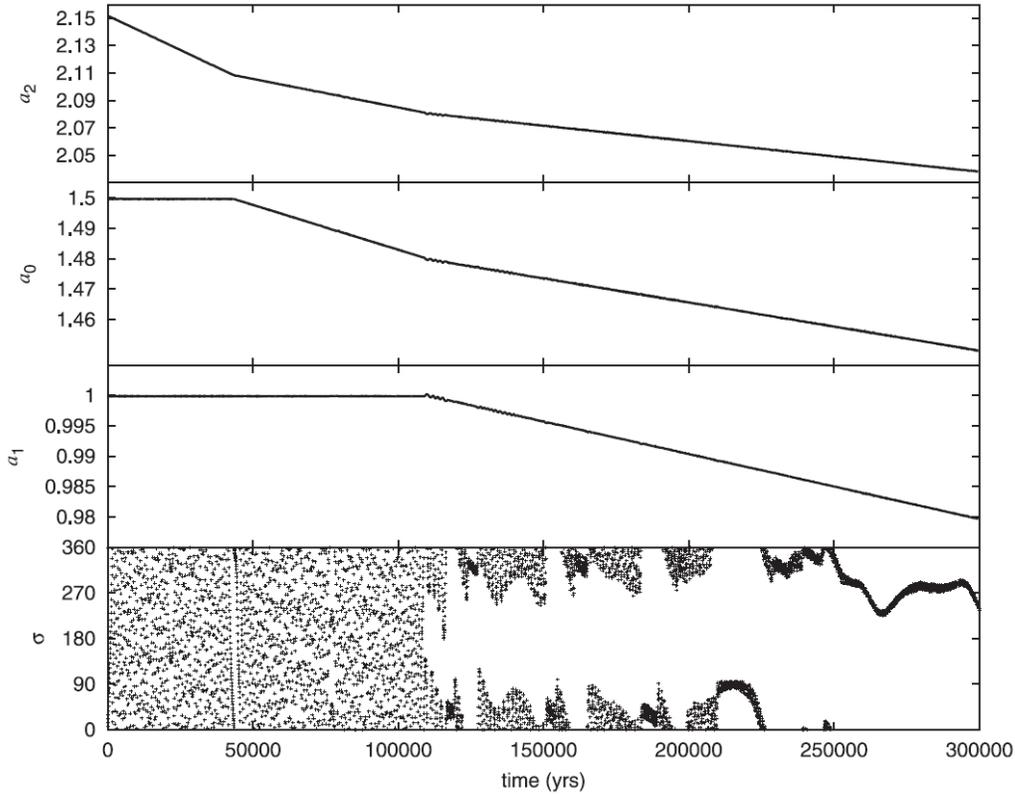


Figure 52: Ejemplo de planeta migrando hacia la estrella que captura un planeta en resonancia y luego este segundo planeta captura un tercero. Se genera una cadena resonante y las tasas disminuyen (Gallardo et al., 2016).

momento el modelo cambia, simplemente que los efectos se reparten entre los planetas que se encuentran vinculados por una resonancia. En este ejemplo se puede ver que los planetas fueron capturados en resonancia, esto no siempre ocurre, muchas veces el planeta vecino no es atrapado, queda en su posición y el planeta viajero se lo lleva puesto.

### 6.10 Resonancias de tres cuerpos

Algunos sistemas planetarios presentan varios planetas que están en resonancias mutuas, generando **cadena resonantes**. Pero son resonancias de dos cuerpos superpuestas como ocurre con los satélites Galileanos. Una partícula se encuentra en resonancia **pura** de tres cuerpos con dos planetas arbitrarios de masas  $m_1$  y  $m_2$  cuando se verifica una conmensurabilidad del tipo

$$kn + k_1n_1 + k_2n_2 \simeq 0 \quad (180)$$

pero a su vez no hay resonancias mutuas de a dos cuerpos. Análogamente al caso de 2 cuerpos se llama orden a  $q = |k + k_1 + k_2|$  y se ha demostrado que es muy relevante en la fuerza de la resonancia pues esta es proporcional a  $e^q$  para órbitas de baja inclinación, ver Gallardo (2014); Gallardo et al. (2016). En las resonancias de tres cuerpos puede darse algo que no ocurre en las de dos cuerpos (con excepción de los troyanos): existen las resonancias de orden cero y como es de esperar son las mas fuertes. La relación resonante (180) se puede escribir también como

$$|k_1(n_1 - n) + k_2(n_2 - n)| = qn \quad (181)$$

de donde es fácil entender por que las de orden cero son fuertes, pues en ese caso *los planetas 1 y 2 están en resonancia mutua en el sistema rotante con el asteroide*. En general son todas débiles

pues sus fuerzas están factorizadas también por las masas de ambos planetas. Pero en órbitas de baja excentricidad, como las resonancias de dos cuerpos son muy débiles es posible que las de tres cuerpos aparezcan. El cálculo analítico o numérico de la  $R$  resonante de tres cuerpos es extremadamente complejo. En el caso de dos cuerpos podíamos computarla suponiendo ambas órbitas fijas pero en el caso de tres cuerpos si hacemos eso obtendremos una función perturbadora nula. O sea, si pretendemos poner la función perturbadora resonante como suma de una contribución por cada planeta con el asteroide tendremos  $R = R_{01} + R_{02}$  pero como no hay resonancia entre el asteroide y cada planeta las  $R_{0i}$  son nulas. Son las perturbaciones mutuas entre los planetas las que generan la resonancia de tres cuerpos con el asteroide, por eso no es posible computar la  $R$  asumiendo órbitas fijas. Una discusión sobre las resonancias de tres cuerpos en los sistemas extrasolares puede verse en Cerioni et al. (2022).

Como en las resonancias de 2 cuerpos aquí también existe la versión restringida, o sea asteroide mas 2 planetas, y general, o sea tres cuerpos masivos. Es una dinámica muuuuuuuuy complicada y que sin embargo esta presente en los sistemas planetarios compactos de baja excentricidad. Y existen miles de asteroides evolucionando en resonancias de tres cuerpos, especialmente con Júpiter y Saturno. Ver el sitio [sites.google.com/view/mmresonances/](https://sites.google.com/view/mmresonances/).

**Ejercicio.** Un planeta de masa  $m_2 = 1m_{Jup}$  migrando hacia la estrella al llegar a  $a_2 = 5$  ua cambia su tasa de migración que era  $\dot{a}_2 = 1$  ua por millón de año a un nuevo valor igual a la mitad de su valor anterior. Esto se interpreta como debido a la captura en resonancia 2:1 de un planeta interior. Calcular la masa del planeta interior.

#### Clases en video:

- Clase 17: <https://youtu.be/Qe8qFMgQLe0>
- Clase 18: <https://youtu.be/Zg41Uk3zNeU>
- Clase 19: <https://youtu.be/mqAcw5Qgr0M>
- Clase 20: <https://youtu.be/LzmWq7yxCLc>

#### Minicurso de resonancias:

- versión 2023: [seguir este link](#)

## References

- Bailey, M.E., Chambers, J.E., Hahn, G., 1992. Origin of sungrazers - A frequent cometary end-state. *A&A* 257, 315–322.
- Batygin, K., Adams, F.C., Brown, M.E., Becker, J.C., 2019. The planet nine hypothesis. *Physics Reports* 805, 1–53. doi:10.1016/j.physrep.2019.01.009, arXiv:1902.10103.
- Batygin, K., Brown, M.E., 2016. Evidence for a Distant Giant Planet in the Solar System. *AJ* 151, 22. doi:10.3847/0004-6256/151/2/22, arXiv:1601.05438.
- Beaugé, C., 1996. On a Global Expansion of the Disturbing Function in the Planar Elliptic Restricted Three-Body Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 64, 313–350. doi:10.1007/BF00054551.
- Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T.A., 2012. Multi-planet extrasolar systems — detection and dynamics. *Research in Astronomy and Astrophysics* 12, 1044–1080. URL: <https://doi.org/10.1088/1674-4527/12/8/009>, doi:10.1088/1674-4527/12/8/009.
- Bretagnon, P., 1990. An iterative method for the construction of a general planetary theory. *A&A* 231, 561–570.
- Brouwer, D., Clemence, G.M., 1961. *Methods of Celestial Mechanics*.
- Brown, E.W., Shook, C.A., 1933. *Planetary theory*.
- Burns, J.A., 1976. Elementary derivation of the perturbation equations of celestial mechanics. *American Journal of Physics* 44, 944–949. URL: <https://doi.org/10.1119/1.10237>, doi:10.1119/1.10237, arXiv:<https://doi.org/10.1119/1.10237>.
- Carpino, M., Milani, A., Nobili, A.M., 1987. Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer planets. *A&A* 181, 182–194.
- Cerioni, M., Beaugé, C., Gallardo, T., 2022. Is the orbital distribution of multi-planet systems influenced by pure 3-planet resonances? *MNRAS* doi:10.1093/mnras/stac876.
- Chambers, J.E., 1999. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS* 304, 793–799. doi:10.1046/j.1365-8711.1999.02379.x.
- Cincotta, P., 2021. Notes on Non-Linear Hamiltonian Dynamics. URL: [http://fcaglp.unlp.edu.ar/~pmc/DNL/notas\\_2018/non-linear-dynamics10.pdf](http://fcaglp.unlp.edu.ar/~pmc/DNL/notas_2018/non-linear-dynamics10.pdf).
- Cincotta, P.M., Simó, C., 2000. Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I. *Astronomy and Astrophysics, Supplement* 147, 205–228. doi:10.1051/aas:2000108.
- Danby, J.M.A., 1992. *Fundamentals of celestial mechanics*.
- Ellis, K.M., Murray, C.D., 2000. The Disturbing Function in Solar System Dynamics. *Icarus* 147, 129–144. doi:10.1006/icar.2000.6399.
- Emelyanov, N., 2020. *The Dynamics of Natural Satellites of the Planets*.

- Fernández, J.A., Gallardo, T., Young, J.D., 2016. The end states of long-period comets and the origin of Halley-type comets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 461, 3075–3088. URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/lookup/doi/10.1093/mnras/stw1532>, doi:10.1093/mnras/stw1532.
- Fernández, J.A., Helal, M., Gallardo, T., 2017. Dynamical evolution and end states of active and inactive Centaurs. submitted to PSS .
- Fernández, J.A., Lemos, P., Gallardo, T., 2021. On the origin of the Kreutz family of sungrazing comets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 508, 789–802. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stab2562>, doi:10.1093/mnras/stab2562, arXiv:<https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/508/1/789/40470594/stab2562.pdf>.
- Ferraz-Mello, S. (Ed.), 2007. Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance. volume 345 of *Astrophysics and Space Science Library*. doi:10.1007/978-0-387-38905-9.
- Ferraz-Mello, S., 2021. Dinamica Caotica dos Sistemas Planetarios.
- Ferraz-Mello, S., Sato, M., 1989. The very-high-eccentricity asymmetric expansion of the disturbing function near resonances of any order. *A&A* 225, 541–547.
- Frouard, J., Fouchard, M., Vienne, A., 2010. About the dynamics of the evection resonance. *A&A* 515, A54. doi:10.1051/0004-6361/200913048.
- Gallardo, T., 2006. Atlas of the mean motion resonances in the Solar System. *Icarus* 184, 29–38. doi:10.1016/j.icarus.2006.04.001.
- Gallardo, T., 2014. Atlas of three body mean motion resonances in the Solar System. *Icarus* 231, 273–286. doi:10.1016/j.icarus.2013.12.020, arXiv:1312.6068.
- Gallardo, T., 2016. Efectos dinámicos de las resonancias orbitales en el Sistema Solar. *Boletin de la Asociacion Argentina de Astronomia La Plata Argentina* 58, 291–297. URL: <http://www.astronomiaargentina.org.ar/b58/2016baaa...58...291G.pdf>.
- Gallardo, T., 2017. Exploring the orbital evolution of planetary systems. *European Journal of Physics* 38, 035002. doi:10.1088/1361-6404/aa5e0c.
- Gallardo, T., 2018. Resonances in the asteroid and trans-Neptunian belts: A brief review. *Planet. Space Sci.* 157, 96–103. doi:10.1016/j.pss.2018.03.007, arXiv:1803.06245.
- Gallardo, T., 2019a. Orbital stability in the Solar system for arbitrary inclinations and eccentricities: planetary perturbations versus resonances. *MNRAS* 487, 1709–1716. doi:10.1093/mnras/stz1419, arXiv:1905.05870.
- Gallardo, T., 2019b. Strength, stability and three dimensional structure of mean motion resonances in the solar system. *Icarus* 317, 121–134. doi:10.1016/j.icarus.2018.07.002, arXiv:1807.07956.
- Gallardo, T., 2020a. Resumen de Dinámica Orbital URL: <http://www.fisica.edu.uy/~gallardo/resumenDinOrb.pdf>.

- Gallardo, T., 2020b. Three-dimensional structure of mean motion resonances beyond Neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 132, 9. doi:10.1007/s10569-019-9948-7, arXiv:1912.04676.
- Gallardo, T., Cabral, R., 2025. Dynamical regimes of small bodies perturbed by an eccentric giant planet. en preparacion .
- Gallardo, T., Coito, L., Badano, L., 2016. Planetary and satellite three body mean motion resonances. *Icarus* 274, 83–98. doi:10.1016/j.icarus.2016.03.018, arXiv:1603.06911.
- Gallardo, T., Hugo, G., Pais, P., 2012. Survey of Kozai dynamics beyond Neptune. *Icarus* 220, 392–403. doi:10.1016/j.icarus.2012.05.025, arXiv:1205.4935.
- Gallardo, T., Suescun, A., 2025. Dynamical regimes of two eccentric and mutually inclined giant planets. enviado a PSS .
- Gallardo, T., Venturini, J., 2010. A secular relativistic model for solar system’s numerical simulations. arXiv:1008.0799.
- Gallardo, T., Venturini, J., Roig, F., Gil-Hutton, R., 2011. Origin and sustainability of the population of asteroids captured in the exterior resonance 1:2 with Mars. *Icarus* 214, 632–644. doi:10.1016/j.icarus.2011.05.029, arXiv:1105.5108.
- Gallardo, T., Beaugé, C., Giuppone, C. A., 2021. Semianalytical model for planetary resonances - application to planets around single and binary stars. *A&A* 646, A148. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039764>, doi:10.1051/0004-6361/202039764.
- Gastineau, M., Laskar, J., 2011. Trip: A computer algebra system dedicated to celestial mechanics and perturbation series. *ACM Commun. Comput. Algebra* 44, 194–197. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1940475.1940518>, doi:10.1145/1940475.1940518.
- Gil-Hutton, R., 2020. Mecánica celeste - fcefn (unsj) URL: <https://freeshell.de/~rgh/mec-unsj.php>.
- Gladman, B., 1993. Dynamics of systems of two close planets. *Icarus* 106, 247 – 263. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103583711693>, doi:<https://doi.org/10.1006/icar.1993.1169>.
- Gonzalez Martinez-Pais, I., 2003. Introducción a la Mecánica Celeste.
- Gutzwiller, M.C., 1998. Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem. *Reviews of Modern Physics* 70, 589–639. doi:10.1103/RevModPhys.70.589.
- Hadden, S., Li, G., Payne, M.J., Holman, M.J., 2017. Chaotic Dynamics of Trans-Neptunian Objects Perturbed by Planet Nine. *The Astronomical Journal* 155, 249. URL: <http://arxiv.org/abs/1712.06547><http://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/aab88c>, doi:10.3847/1538-3881/aab88c, arXiv:1712.06547.
- Hadden, S., Tamayo, D., 2022. celmech: A Python Package for Celestial Mechanics. *AJ* 164, 179. doi:10.3847/1538-3881/ac8d01, arXiv:2205.10385.

- Hagihara, Y., 1972. *Celestial mechanics*. Vol.2, pt.1: Perturbation theory; Vol.2, pt.2: Perturbation theory.
- Hamilton, D.P., 1994. A Comparison of Lorentz, Planetary Gravitational, and Satellite Gravitational Resonances. *Icarus* 109, 221–240. doi:10.1006/icar.1994.1089.
- Hilborn, R.C., 1994. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*.
- Ito, T., Ohtsuka, K., 2019. The Lidov-Kozai Oscillation and Hugo von Zeipel. *Monographs on Environment, Earth and Planets* 7, 1–113. doi:10.5047/meep.2019.00701.0001, arXiv:1911.03984.
- Knezevic, Z., Lemaître, A., Milani, A., 2002. The Determination of Asteroid Proper Elements, in: *Asteroids III*, pp. 603–612.
- Kokubo, E., 2003. Kozai mechanism URL: <https://www.cfca.nao.ac.jp/~tito/ndyn/nbody2003/ke.pdf>.
- Korsch, H., Jodl, H.J., Hartmann, T., 2008. *Chaos*.
- Kozai, Y., 1962. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *AJ* 67, 591–598. doi:10.1086/108790.
- Laskar, J., 1997. Large scale chaos and the spacing of the inner planets. *A&A* 317, L75–L78.
- Lee, M.H., Peale, S.J., 2003. Secular Evolution of Hierarchical Planetary Systems. *The Astrophysical Journal* 592, 1201–1216. URL: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0304454><http://stacks.iop.org/0004-637X/592/i=2/a=1201>, doi:10.1086/375857, arXiv:0304454.
- Lei, H., 2019. Three-dimensional phase structures of mean motion resonances. *MNRAS* 487, 2097–2116. doi:10.1093/mnras/stz1422.
- Lei, H., Li, J., 2020. Multi-harmonic Hamiltonian models with applications to first-order resonances. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/staa3115>, doi:10.1093/mnras/staa3115. staa3115.
- Lemaître, A., 2010. Resonances: Models and Captures, in: Souchay, J., Dvorak, R. (Eds.), *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag. volume 790, pp. 1–62. doi:10.1007/978-3-642-04458-8\_1.
- Lemos, Pablo, 2018. Captura de satélites en escenarios de migración planetaria. Tesis de Maestría, Montevideo, Udelar. FC - PEDECIBA URL: <https://www.colibri.udelar.edu.uy/jspui/handle/20.500.12008/21478>.
- Libert, A.S., 2007. *Dynamique séculaire du problème des trois corps appliqué aux systèmes extrasolaires*. PhD Thesis.
- Libert, A.S., Henrard, J., 2008. Secular frequencies of 3-D exoplanetary systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 100, 209–229. doi:10.1007/s10569-007-9113-6.
- Lopez Garcia, F., 2018. *Apuntes de Mecanica Celeste Clasica*. URL: <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/87281>.

- Malhotra, R., 1998. Orbital resonances and chaos in the solar system, in: In: Lazzaro D, et al. (eds), *Solar System Formation and Evolution*, ASP Conference Series, pp. 37–63.
- Malhotra, R., 2012. Orbital resonances in planetary systems. *Encyclopedia of Life Support Systems - Celestial Mechanics* 6, 31.
- Malhotra, R., Zhang, N., 2020. On the Divergence of First Order Resonance Widths at Low Eccentricities. *MNRAS* doi:10.1093/mnras/staa1751, arXiv:2006.09452.
- Michtchenko, T.A., Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., 2006a. Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 94, 411–432. doi:10.1007/s10569-006-9009-x.
- Michtchenko, T.A., Ferraz-Mello, S., Beaugé, C., 2006b. Modeling the 3-D secular planetary three-body problem. Discussion on the outer  $\nu$  Andromedae planetary system. *Icarus* 181, 555–571. doi:10.1016/j.icarus.2005.11.015, arXiv:astro-ph/0505169.
- Michtchenko, T.A., Malhotra, R., 2004. Secular dynamics of the three-body problem: application to the  $\nu$  Andromedae planetary system. *Icarus* 168, 237–248. doi:10.1016/j.icarus.2003.12.010, arXiv:astro-ph/0307094.
- Mikkola, S., 2020. *Gravitational Few-Body Dynamics: A Numerical Approach*.
- Milani, A., Knezevic, Z., 1990. Secular perturbation theory and computation of asteroid proper elements. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 49, 347–411. doi:10.1007/BF00049444.
- Moons, M., 1994. Extended Schubart averaging. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 60, 173–186. doi:10.1007/BF00693099.
- Moons, M., Morbidelli, A., 1995. Secular resonances inside mean-motion commensurabilities: the 4/1, 3/1, 5/2 and 7/3 cases. *Icarus* 114, 33–50. doi:10.1006/icar.1995.1041.
- Morbidelli, A., 2002a. *Modern Celestial Mechanics: aspects of solar system dynamics*. URL: <http://www.oca.eu/morby/celmech.pdf>.
- Morbidelli, A., 2002b. Modern Integrations of Solar System Dynamics. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 30, 89–112. doi:10.1146/annurev.earth.30.091201.140243.
- Morbidelli, A., Batygin, K., Brasser, R., Raymond, S.N., 2020. No evidence for interstellar planetesimals trapped in the Solar system. *MNRAS* 497, L46–L49. doi:10.1093/mnras1/slaa111, arXiv:2006.04534.
- Morbidelli, A., Moons, M., 1993. Secular Resonances in Mean Motion Commensurabilities: The 2/1 and 3/2 Cases. *Icarus* 102, 316–332. doi:10.1006/icar.1993.1052.
- Morbidelli, A., Thomas, F., Moons, M., 1995. The resonant structure of the Kuiper belt and the dynamics of the first five TNOs. *Icarus* .
- Moulton, F.R., 1914. *An introduction to celestial mechanics*.
- Murray, C.D., Dermott, S.F., 1999. *Solar System Dynamics*.

- Namouni, F., Morais, M.H.M., 2020. Resonance libration and width at arbitrary inclination. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 493, 2854–2871. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/staa348>, doi:10.1093/mnras/staa348, arXiv:<https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/493/2/2854/32814912/staa348.pdf>.
- Naoz, S., 2016. The eccentric kozai-lidov effect and its applications. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 54, 441–489. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081915-023315>, doi:10.1146/annurev-astro-081915-023315, arXiv:<https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081915-023315>.
- Nesvorný, D., Alvarillos, J.L.A., Dones, L., Levison, H.F., 2003. Orbital and Collisional Evolution of the Irregular Satellites. *The Astronomical Journal* 126, 398–429. doi:10.1086/375461.
- Pan, N., Gallardo, T., 2025. An attempt to build a dynamical catalog of present-day solar system co-orbitals: An attempt to build a dynamical catalog. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 137, 2. doi:10.1007/s10569-024-10234-y, arXiv:2410.20015.
- Pons, J., Gallardo, T., 2022. Secular evolution of resonant small bodies: semi-analytical approach for arbitrary eccentricities in the coplanar case. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 511, 1153–1166. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stac018>, doi:10.1093/mnras/stac018, arXiv:<https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/511/1/1153/42397808/stac018.pdf>.
- Pons Vuolo, Juan, 2022. Dinámica secular de sistemas resonantes coplanares: aplicaciones en el sistema solar y en sistemas extrasolares. Tesis de Maestría, Montevideo, Udelar. FC - PEDECIBA URL: <https://www.colibri.udelar.edu.uy/jspui/bitstream/20.500.12008/34827/1/uy24-64394.pdf>.
- Portilla, J.G., 2001. Elementos de Astronomía de Posición.
- Ramos, X.S., Correa-Otto, J.A., Beaugé, C., 2015. The resonance overlap and Hill stability criteria revisited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 123, 453–479. doi:10.1007/s10569-015-9646-z, arXiv:1509.03607.
- Rodríguez, A., Gallardo, T., 2005. The Dynamics of the HD 12661 Extrasolar Planetary System. *ApJ* 628, 1006–1013. doi:10.1086/430816.
- Roig, F., Simula, A., Ferraz-Mello, S., Tsuchida, M., 1998. The high-eccentricity asymmetric expansion of the disturbing function for non-planar resonant problems. *A&A* 329, 339–349.
- Roy, A.E., 2005. Orbital Motion.
- Saillenfest, M., Fouchard, M., Tommei, G., Valsecchi, G.B., 2016. Long-term dynamics beyond Neptune: secular models to study the regular motions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 126, 369–403. doi:10.1007/s10569-016-9700-5, arXiv:1611.04457.
- Saillenfest, M., Fouchard, M., Tommei, G., Valsecchi, G.B., 2017. Study and application of the resonant secular dynamics beyond Neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 127, 477–504. doi:10.1007/s10569-016-9735-7, arXiv:1611.04480.
- Scheeres, D.J., 2002. Stability in the Full Two-Body Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 83, 155–169.

- Schubart, J., 1964. Long-Period Effects in Nearly Commensurable Cases of the Restricted Three-Body Problem. SAO Special Report 149.
- Schubart, J., 1968. Long-Period Effects in the Motion of Hilda-Type Planets. AJ 73. doi:10.1086/110605.
- Schubart, J., 1978. New Results on the Commensurability Cases of the Problem Sun- Jupiter-Asteroid. volume 72 of *Astrophysics and Space Science Library*. pp. 137–143. doi:10.1007/978-94-009-9809-4\_15.
- Schwichtenberg, J., 2019. No-Nonsense Classical Mechanics: A Student-Friendly Introduction. No-Nonsense Books. URL: <https://books.google.com.uy/books?id=cIiXDwAAQBAJ>.
- Shevchenko, I.I., 2017. The Lidov-Kozai Effect - Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy. volume 441. doi:10.1007/978-3-319-43522-0.
- Shevchenko, I.I., 2020. Dynamical Chaos in Planetary Systems. volume 463. doi:10.1007/978-3-030-52144-8.
- Tamayo, D., Cranmer, M., Hadden, S., Rein, H., Battaglia, P., Obertas, A., Armitage, P.J., Ho, S., Spergel, D.N., Gilbertson, C., Hussain, N., Silburt, A., Jontof-Hutter, D., Menou, K., 2020. Predicting the long-term stability of compact multiplanet systems. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 117, 18194–18205. doi:10.1073/pnas.2001258117, arXiv:2007.06521.
- Thomas, F., Morbidelli, A., 1996. The Kozai Resonance in the Outer Solar System and the Dynamics of Long-Period Comets. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 64, 209–229. doi:10.1007/BF00728348.
- Touma, J.R., Tremaine, S., Kazandjian, M.V., 2009. Gauss’s method for secular dynamics, softened. MNRAS 394, 1085–1108. doi:10.1111/j.1365-2966.2009.14409.x, arXiv:0811.2812.
- Tremaine, S., 2023. Dynamics of Planetary Systems.
- Tremaine, S., Touma, J., Namouni, F., 2009. Satellite Dynamics on the Laplace Surface. AJ 137, 3706–3717. doi:10.1088/0004-6256/137/3/3706, arXiv:0809.0237.
- Turrini, D., Zinzi, A., Belinchon, J.A., 2020. Normalized angular momentum deficit: A tool for comparing the violence of the dynamical histories of planetary systems. Astronomy and Astrophysics 636, 1–6. doi:10.1051/0004-6361/201936301, arXiv:2003.05366.
- Valtonen, M., Karttunen, H., 2006. The Three-Body Problem.
- Vinson, B.R., Chiang, E., 2018. Secular dynamics of an exterior test particle: The inverse Kozai and other eccentricity-inclination resonances. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 474, 4855–4869. doi:10.1093/mnras/stx3091, arXiv:1711.10495.
- Williams, J.G., Faulkner, J., 1981. The positions of secular resonance surfaces. Icarus 46, 390–399. doi:10.1016/0019-1035(81)90140-8.
- Wisdom, J., Holman, M., 1991. Symplectic maps for the N-body problem. AJ 102, 1528–1538. doi:10.1086/115978.

## 7 Apéndice

### 7.1 Efecto de $(e, i)$ planetarias

Calculando  $R_{sec}$  numéricamente y usando las ecuaciones de Lagrange para un asteroide podemos analizar la diferencia en los valores de las derivadas de los elementos entre el caso de un sistema planetario inclinado y excéntrico y uno circular y plano lo que conduce al concepto de elementos propios y forzados. Los resultados están en las figuras 53 a 62.

Observamos que cuando imponemos  $e_{pla} = i_{pla} = 0$  obtenemos que  $\dot{e}$  y  $\dot{i}$  en función de  $\Omega$  y  $\varpi$  presentan pequeñas oscilaciones simétricas en torno de cero por lo que su efecto acumulativo al variar  $\Omega$  y  $\varpi$  es despreciable y las  $e, i$  se mantienen aproximadamente constantes (valores propios) con una variación oscilante pero con valor neto no nulo de  $\Omega, \varpi$  (frecuencias propias, ver figuras 60 y 62). Pero al incluir la excentricidad e inclinación de los planetas se rompe la simetría y aparece una variación sistemática de  $e, i$  generada por modos forzados.

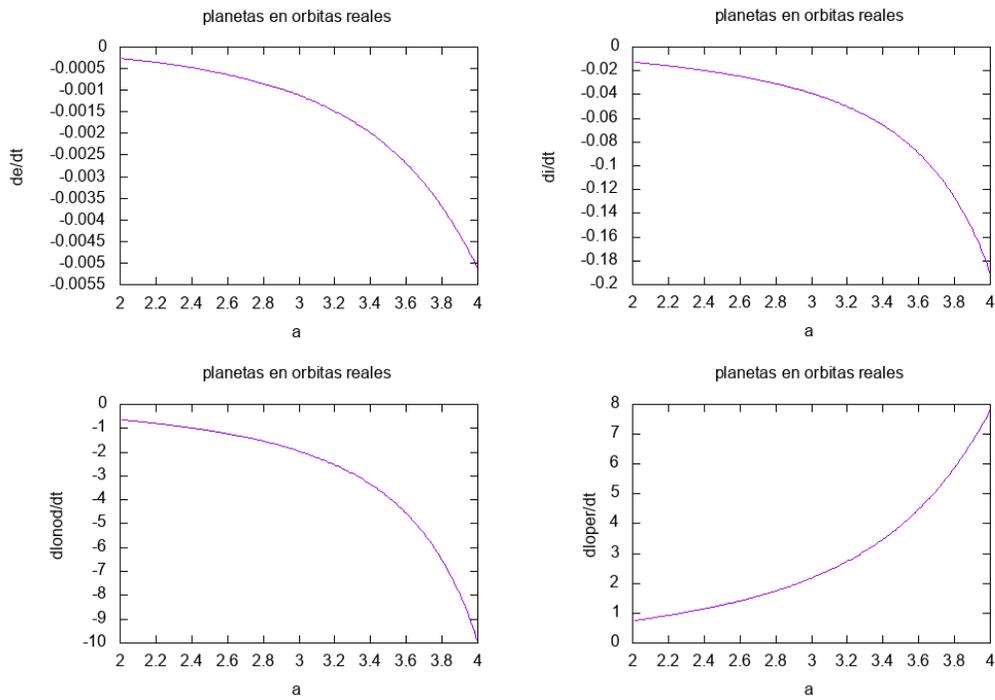


Figure 53: Las derivadas de los elementos orbitales calculadas con las ecuaciones de Lagrange en función de  $a$  para una partícula de  $e = 0.1$ ,  $i = 5$ ,  $\Omega = 60$ ,  $\varpi = 120$ . Consideramos como perturbadores a los 4 gigantes en sus órbitas reales.

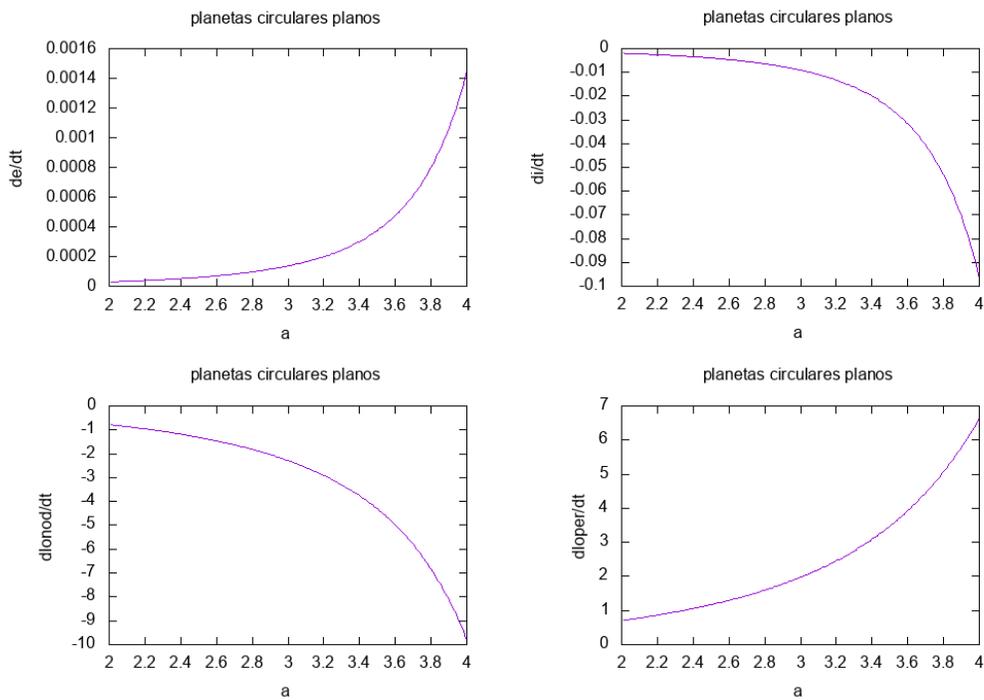


Figure 54: Idem figura 53 pero con los 4 gigantes en órbitas circulares y coplanares.

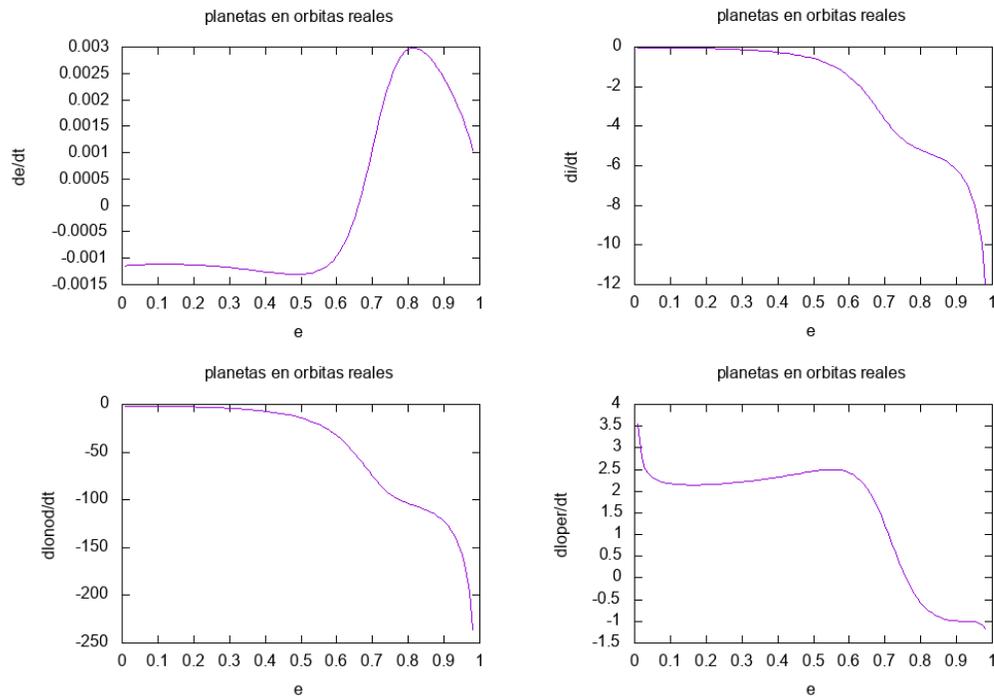


Figure 55: Las derivadas de los elementos orbitales calculadas con las ecuaciones de Lagrange en función de  $e$  para una partícula de  $a = 3.0$ ,  $i = 5$ ,  $\Omega = 60$ ,  $\varpi = 120$ . Consideramos como perturbadores a los 4 gigantes en sus órbitas reales.

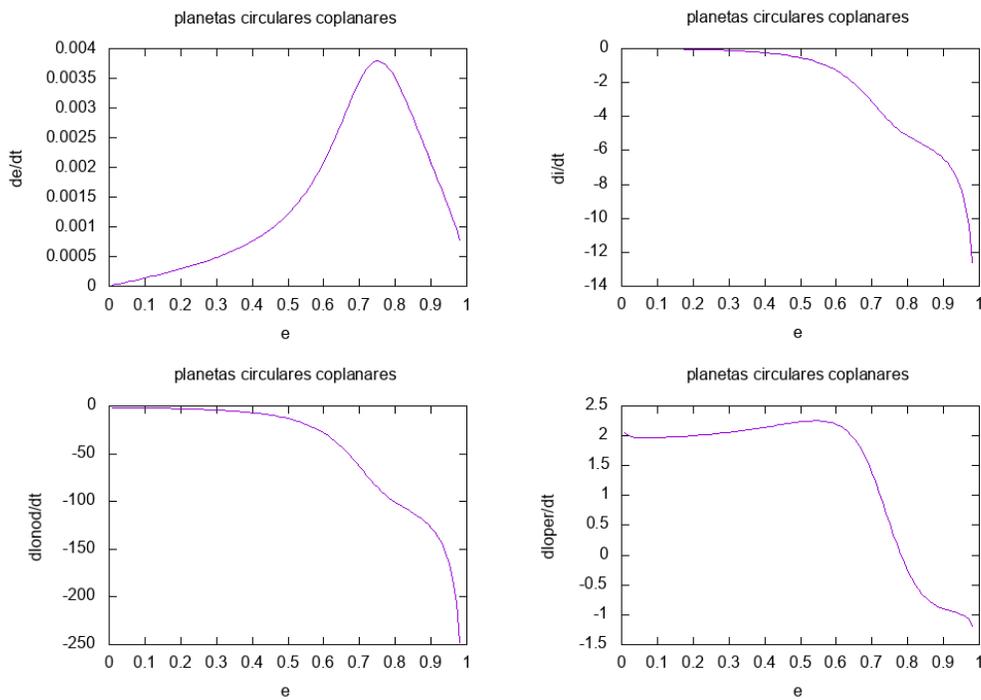


Figure 56: Idem figura 55 pero con los 4 gigantes en órbitas circulares y coplanares.

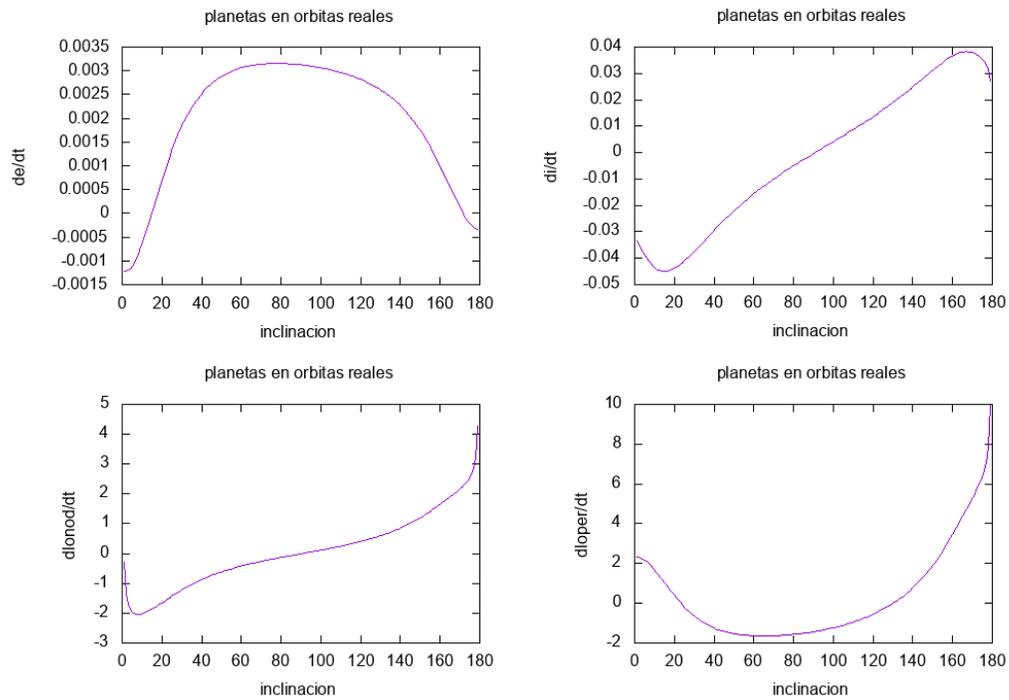


Figure 57: Las derivadas de los elementos orbitales calculadas con las ecuaciones de Lagrange en función de  $i$  para una partícula de  $a = 3.0$ ,  $e = 0.1$ ,  $\Omega = 60$ ,  $\varpi = 120$ . Consideramos como perturbadores a los 4 gigantes en sus órbitas reales.

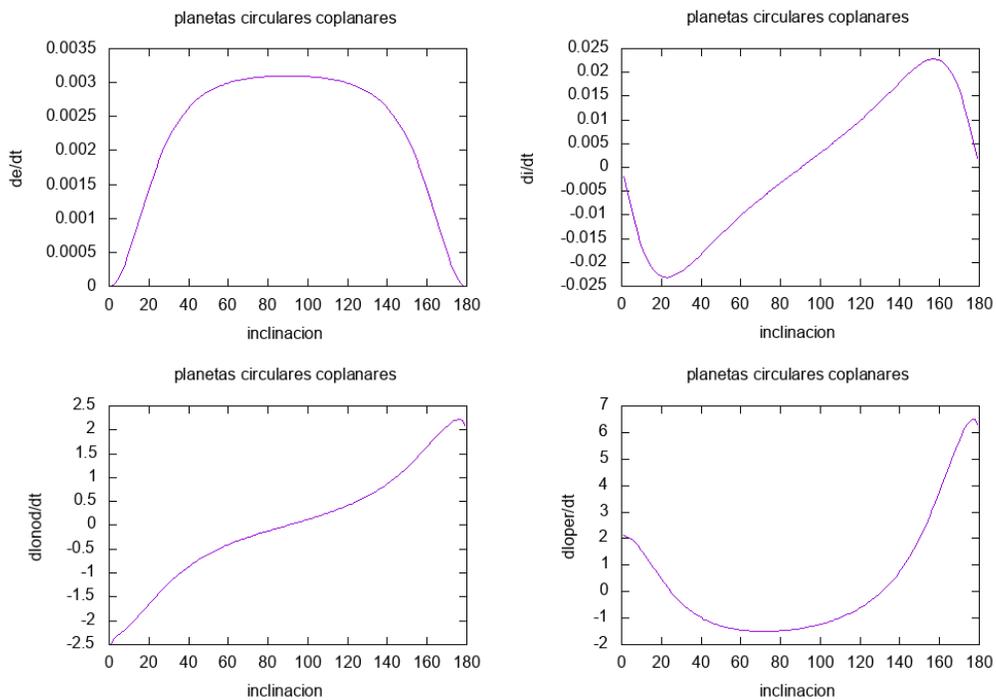


Figure 58: Idem figura 57 pero con los 4 gigantes en órbitas circulares y coplanares.

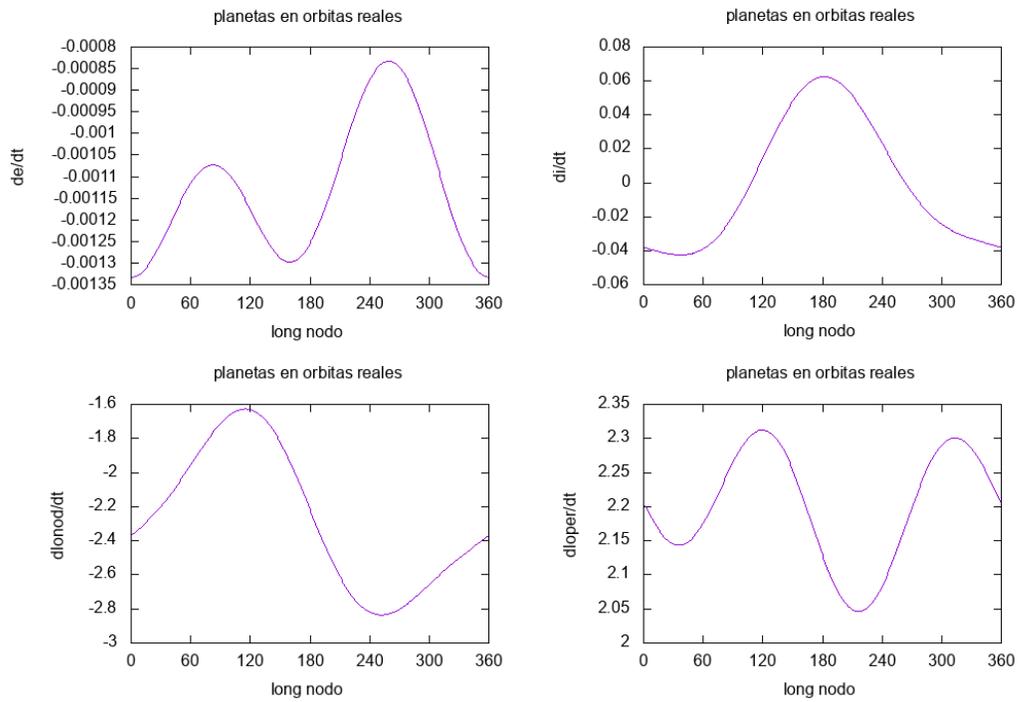


Figure 59: Las derivadas de los elementos orbitales calculadas con las ecuaciones de Lagrange en función de  $\Omega$  para una partícula de  $a = 3.0$ ,  $e = 0.1$ ,  $i = 5$ ,  $\varpi = 120$ . Consideramos como perturbadores a los 4 gigantes en sus órbitas reales.

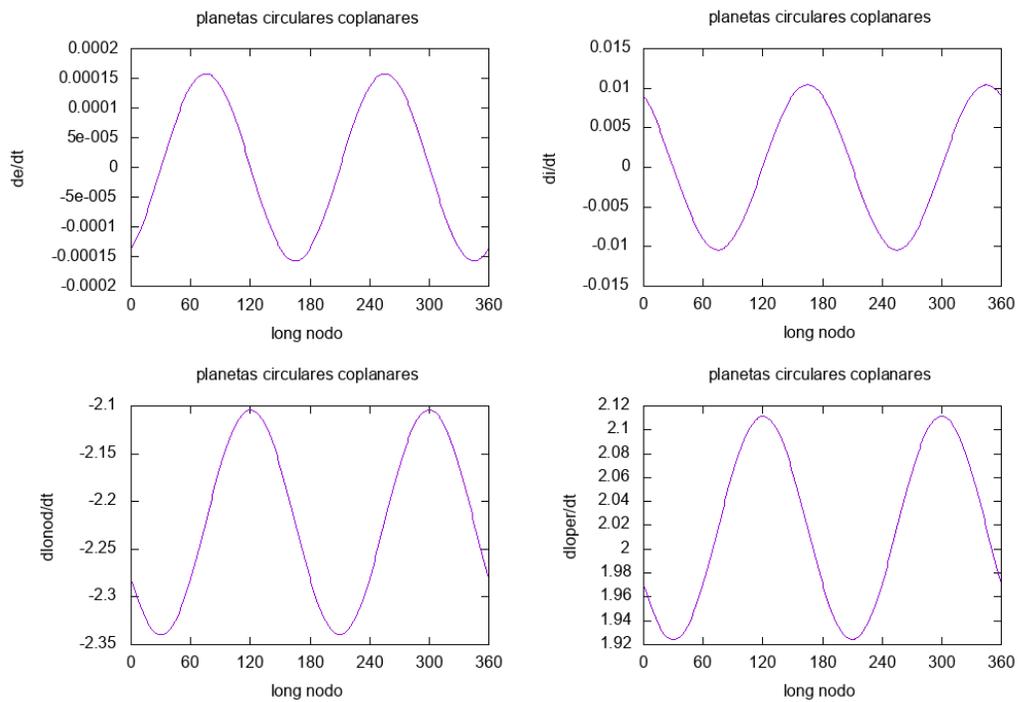


Figure 60: Idem figura 59 pero con los 4 gigantes en órbitas circulares y coplanares.

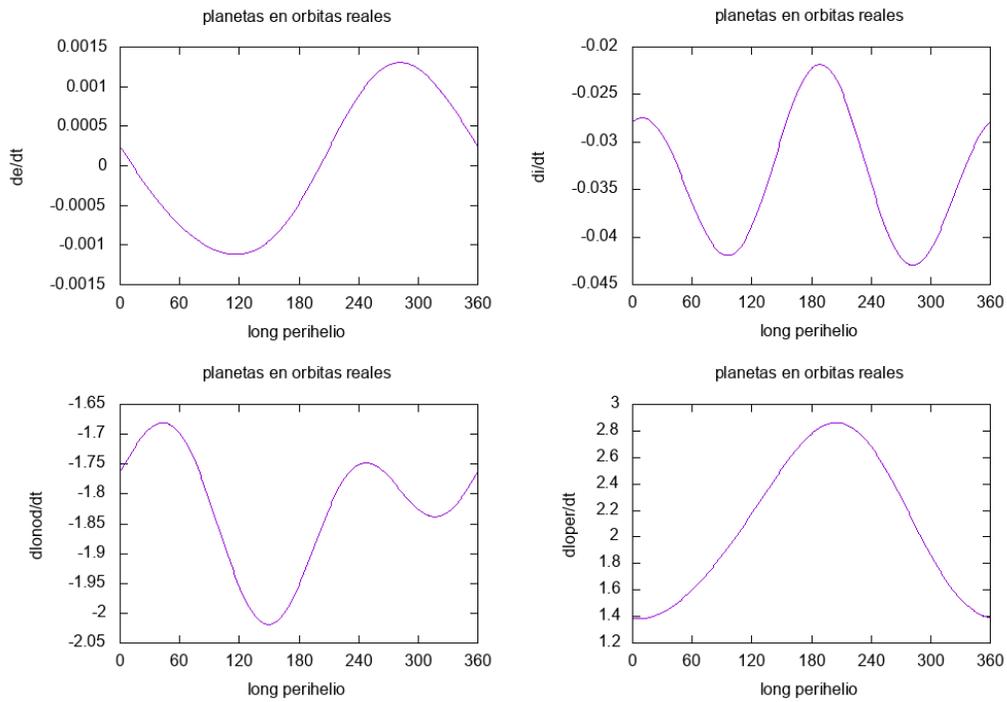


Figure 61: Las derivadas de los elementos orbitales calculadas con las ecuaciones de Lagrange en función de  $\varpi$  para una partícula de  $a = 3.0, e = 0.1, i = 5, \Omega = 60$ . Consideramos como perturbadores a los 4 gigantes en sus órbitas reales.

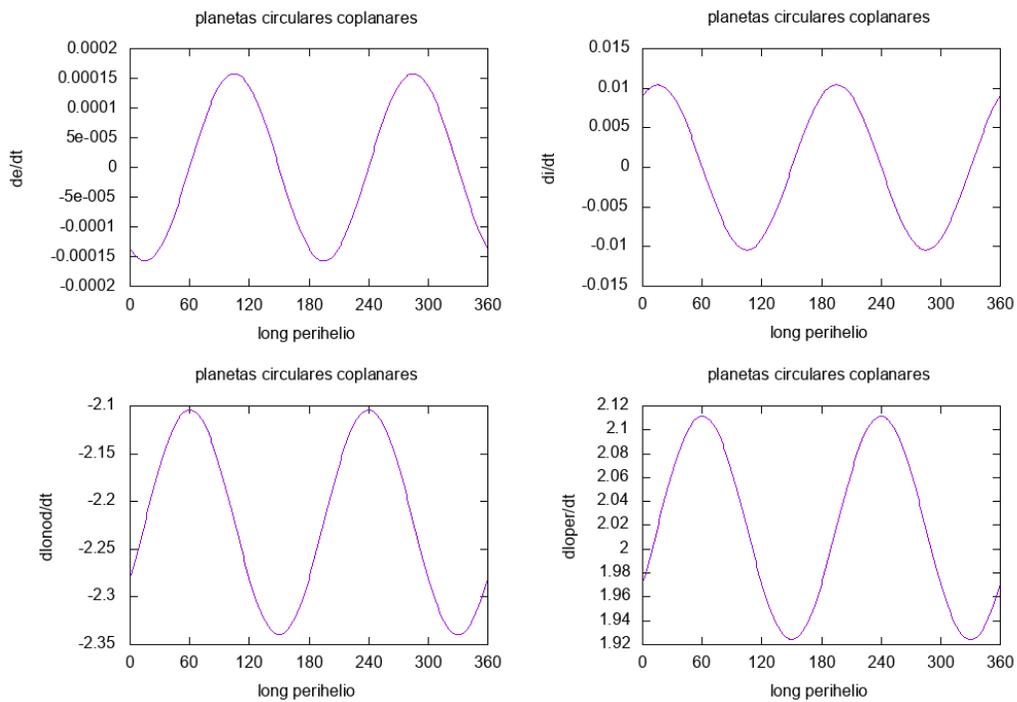


Figure 62: Idem figura 61 pero con los 4 gigantes en órbitas circulares y coplanares.