# Resumen de Dinámica Orbital

Tabare Gallardo
Instituto de Fisica, Facultad de Ciencias, UdelaR.

August 22, 2020

**Abstract**

Resumen conceptual del curso de Dinámica Orbital:
www.astronomia.edu.uy/depto/mece

## 1 Historia

En este video contamos las primeras etapas de la astronomia:
Ver en youtube.

El *Epitome in Almagestum*, un apéndice (debido a Regiomontanus) de la obra de Ptolomeo *Sintaxis Matematica* traducida del griego al árabe y del árabe al latín, influye en Copernico quien concluye en 1543 que el sistema del mundo debe ser heliocéntrico y publica su *De Revolutionibus Orbium Coelestium* con el infame prefacio de Osiander. Copernico muere simultáneamente con la publicación de su obra pero esta se difunde rápidamente por Europa (tenemos imprenta desde 1454).

Tycho Brahe es un astrónomo danes que tiene un gran observatorio sin telescopios pues aun no se habían inventado. Realiza mediciones astrometricas precisas de los planetas sobre un catalogo estelar también preciso que el mismo construyo. Tenia 777 estrellas y corría el año 1587. En 1596 Kepler publica *Misterium Cosmographium* donde sugiere que los planetas se mueven debido a un *vigor* solar que disminuye con la distancia. En 1600 la Inquisicion esta bastante ocupada: quema a Giordano Bruno y pone en el index de los libros prohibidos la obra de Copernico. Ese mismo año Kepler es expulsado de Austria y se encuentra con Tycho en Praga quien lo invita a su observatorio para trabajar juntos. Tycho muere al año y Kepler accede a las observaciones planetarias de Tycho celosamente guardadas. Mientras tanto, en Padua, Galileo estudia la caída de los cuerpos y concluye que la distancia recorrida va con $t^2$. En 1609 Kepler publica su primera y segunda ley: los planetas recorren elipses, es el resultado del análisis de las observaciones de Tycho, básicamente del planeta Marte cuya órbita es bastante apartada de la circunferencia. Estas leyes serian ignoradas por 60 años hasta que los ingleses (Newton entre ellos) las redescubran. Kepler le escribe a Galileo (quien disfruta su telescopio) sobre la elipticidad de las órbitas. Galileo cree que Kepler esta loco y no le responde a sus varias cartas. En 1610 Galileo esta de fiesta con su telescopio, el sistema tiene que ser heliocéntrico pero, eso si, órbitas circulares. Los catálogos estelares son tan malos que en 1612 Galileo observa y registra a Neptuno pero cree que es una estrella. En 1619 Kepler publica la 3ra ley, que es bien recibida por la comunidad pues permite definir las distancias. En ese año Descartes opina que no existe el vacío y que los planetas se mueven por vórtices que arrastran los planetas. Esta difícil entender por que se mueven los planetas.

En 1631 Galileo va a la Inquisición por insistir demasiado con su modelito heliocéntrico: prisión domiciliaria de por vida (en 1992 la iglesia se disculpa formalmente). En 1639 Horrocs concluye que la órbita lunar también es elíptica. Las leyes de Kepler se aplicaran a los satélites? En 1660 se funda la Royal Society en Londres y en 1666 a Academia de Ciencias de Paris. Newton era un desconocido pero él dice que a esa altura ya tenia desarrollado el calculo y el concepto de la Ley de Gravitación Universal. En 1673 Huygens encuentra que el empuje centrifugo es $v^2/r$ y considerando la 3ra ley de Kepler ($(r/v)^2 \propto r^3$) entonces el empuje centrifugo resulta proporcional a $1/r^2$. El Sol debe estar ejerciendo esa atracción sobre los planetas, si es que se trata de un balance de fuerzas.

En 1674 Hooke en una conferencia propone que todos los cuerpos se atraen (no solo el Sol atrae) y discute mediante correspondencia con Newton si esa atracción sería proporcional a $1/r$ o $1/r^2$. Hooke también propone que el movimiento orbital no es debido al equilibrio de 2 fuerzas (atracción y centrifuga) sino el resultado de una acción debida al Sol combinada con la inercia que tiende mantener el movimiento rectilíneo.

En 1679 Hooke consulta a Newton sobre la posibilidad de acción a distancia. Podría ser allí que Newton adopta la idea. En 1682 aparece un cometa y años mas tarde Halley propone que es el mismo cometa que viene apareciendo cada 76 años, o sea los cometas son periódicos. Se podrán aplicar las mismas leyes que a los planetas?

En 1684 Wren, Hooke y Halley no tienen dudas que la atracción solar debe ir con $1/r^2$ pero cómo sera el movimiento orbital con esa ley? Halley consulta a Newton y este responde que las órbitas deben ser elipses y que ese asunto ya lo tenia demostrado. Halley le pide que le mande el trabajo que luego se publica como *Sobre el movimiento de los cuerpos en orbita*, en latín mas bien. Halley convence a Newton de que publique toda su obra y finalmente Halley financia la publicación de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural) donde están todas las leyes de la mecánica.

En 1776 Laplace (sustentado en trabajos de Euler y Lagrange) encuentra sus ecuaciones planetarias que describen la variación de los elementos orbitales de los planetas debido a las atracciones mutuas. De allí se deduce que los planetas tienen órbitas estables, los semiejes no cambian con el tiempo.

En 1781 Herschel descubre Urano. La oscura Ley de Bode indica que entre Marte y Júpiter debería existir un planeta asi que comienza una cacería que lleva al descubrimiento del primer asteroide en 1801 por parte de Piazzi desde Palermo. El objeto se pierde asi que Gauss afina un método de determinación de órbitas que hoy es esencialmente lo que conocemos por método de mínimos cuadrados.

En base al movimiento de Urano en 1846 Leverrier predice la existencia de otro planeta e indica masa y posición. Adams desde Cambridge hizo por esa época cálculos análogos pero sin la profundidad de Leverrier. Galle lo descubre casi inmediatamente buscando en la región indicada por Leverrier a menos de 1 grado de la posición indicada. Es el triunfo de la Mecánica Celeste.

En 1859 Leverrier reporta que el perihelio de Mercurio no responde a la teoría. Sugiere que un planeta entre el Sol y Mercurio lo estaría perturbando: Vulcano. Nunca se descubre y solo en 1915 se explica el asunto con la *Teoría General de la Relatividad* (ya no en Latin!) de Einstein.

La continuación de esta historia puede seguirse en este excelente resumen
http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Orbits.html.

## 2 Movimiento Central

Se conserva el momento angular, por lo que la velocidad areolar es constante (2da ley de Kepler) y de donde se deduce que el movimiento es plano y las coordenadas polares se vuelven convenientes. Si además de ser central la fuerza deriva de un potencial entonces como no puede haber aceleración transversa resulta que el potencial necesariamente deberá depender sólo de la distancia $r$ y no de su dirección.

El hecho de que el momento angular sea constante implica que el giro se hace siempre en el mismo sentido, no puede invertirse. Y también que si $r$ tiende a infinito, el ángulo polar tiende a una constante, o sea una asíntota. No puede alejarse espiraleando.

Es posible eliminar $\theta$ en la ecuación de movimiento y obtener una ecuación en la distancia $r$ y su derivada. Los puntos en donde $\dot{r} = 0$ se llaman apsides. Son los puntos extremos, donde $r$ es mínimo o máximo, y dependen de la forma del potencial $V$. Allí la velocidad es transversa, no hay componente radial. No confundir $\dot{r}$ con $\dot{\vec{r}}$.

La transformación $u = 1/r$ lleva a las ecuaciones de Binet que ayudan a resolver las ecuaciones, especialmente el caso del potencial Newtoniano. La solución es una cónica (1ra ley de Kepler).

La energía total en el caso del potencial Newtoniano resulta depender sólo del semieje orbital $a$. No depende de la excentricidad. Así que es $a$ quien define si la energía es negativa (elipse, ligado), positiva (hipérbola, desligado) o cero (parábola, caso límite).

De la ecuación de la energía vemos que estando la partícula en el infinito si su energía es positiva (hipérbola) tendrá velocidad no nula, pero si su energía es cero (parábola) tendrá velocidad nula. Si la energía fuera negativa, tendríamos $v^2 < 0$ en el infinito por lo cual nunca puede llegar al infinito. La velocidad en el infinito, que es la velocidad cuando $\mu/r \sim 0$, se conoce como "velocidad al infinito" y es la velocidad de la partícula antes de comenzar a sentir la aceleración generada por el potencial gravitacional.

La energía y el momento angular son las magnitudes que definen tamaño y forma de la órbita. La energía define el tipo de cónica y tamaño a través del semieje. Y el momento angular define la excentricidad. Si el momento angular es cero, la trayectoria es una recta.

La 3ra ley de Kepler se obtiene considerando la constancia de la velocidad areolar y aplicándola a un periodo orbital completo.

## 3 Distribución contínua de materia

El potencial gravitacional de un cuerpo extenso en un cierto punto se obtiene integrando las contribuciones de cada uno de los elementos infinitesimales de masa que componen el cuerpo. Esa integral puede quedar sencilla, como en el caso de una esfera de densidad radial o complicada como en el caso general, aunque siempre se puede integrar numéricamente. Si queremos la aceleración en ese punto debemos calcular el gradiente del potencial. Tambien podríamos calcular la aceleración en el punto como integral de todas las aceleraciones generadas por los elementos de masa pero este calculo puede ser mas complicado por ser vectorial.

Newton ofrece una explicación simple para el potencial dentro de una esfera de densidad radial. Gauss lo hace con mayor elegancia y ademas su teorema se aplica a todos los cuerpos. En ambas explicaciones el concepto de angulo sólido es fundamental. Si bien el teorema de Gauss es bien general, para que sea útil tiene que haber algún tipo de simetría en la distribución de masas de lo contrario el calculo de la integral se vuelve muy complicado. Por ejemplo, si tengo un planeta esférico, elijo una superficie esférica concéntrica en donde la aceleración es desconocida pero constante y colineal con la perpendicular a la superficie. De aquí obtengo fácilmente la expresión para la aceleración. Otro caso típico es una superficie plana.

La formula de MacCullagh es una aproximación en base a los momentos principales de inercia válida lejos del planeta por ser un desarrollo en $R/r < 1$. Y si estamos muy lejos, basta la expresión para el potencial de una masa puntual. Así ven los cometas de la Nube de Oort al sistema planetario en su conjunto, como un punto atractor en el baricentro del sistema solar.

El desarrollo general del potencial es en armónicos esféricos. Si se poseen medidas suficientes del potencial alrededor de un planeta se pueden determinar los momentos gravitacionales $J$ hasta un alto orden y lograr una excelente descripción del campo mediante armónicos esféricos. Los términos de alto orden describen las pequeñas irregularidades del potencial detectables en las proximidades del planeta y que son debidas a inhomogeneidades próximas a la superficie. Los de bajo orden describen los apartamientos mas notorios y que son generados en el interior del planeta.

Si se puede asumir simetría de revolución la dependencia con $\lambda$ desaparece simplificando notablemente la expresión. Si el planeta rota siguiendo el eje de simetría podremos ignorar su rotación, de lo contrario habrá que agregar una dependencia temporal al potencial tal como lo sentiría una partícula externa al planeta. Si además hay simetría norte-sur los $J$ impares se anulan. El potencial que experimentan los cuerpos solidarios al planeta es diferente que el que experimentan los que no son solidarios pues los objetos solidarios sufren también la fuerza centrifuga.

El potencial de un planeta irregular es no central por lo tanto no se conserva el momento angular orbital de su satélite aunque sí se conserva el total del sistema: momento angular orbital del sistema en torno al baricentro mas los momentos angulares rotacionales de ambos cuerpos. El satélite experimenta una fuerza hacia una dirección diferente del baricentro del planeta y éste experimenta por reacción la misma fuerza en la misma dirección y sentido contrario. Al no estar aplicada en el baricentro esto genera un momento en el planeta que cambiará su momento angular rotacional $\vec{L}$. El efecto neto es equivalente al de un momento $\vec{\mathcal{M}}$ (par de fuerzas) mas una fuerza aplicada en el baricentro del planeta. Aparece un intercambio de momento angular entre el satélite y el planeta. Si es sistemático habrá una variación sistemática de la órbita del satélite y de la rotación planetaria.

Una cosa es la evolución del momento angular del planeta $\vec{L}$ y otra cosa es la evolución de su vector rotación $\vec{\omega}$. Conociendo el momento $\vec{\mathcal{M}}$ a que es sometido el planeta puedo obtener mediante las ecuaciones de Euler la evolución de $\vec{\omega}$. El vector rotación se mueve en el espacio (precesión, ver sección 7.6 de las Notas de Ciencias Planetarias) y se mueve mas discretamente dentro de la figura geométrica del planeta (movimiento polar). Un planeta puede considerarse un cuerpo libre sometido a pequeños momentos generados por cuerpos externos por lo que resulta conveniente asumir que el vector rotación pasa por el baricentro del planeta, éste a su vez puede estar rotando respecto al baricentro del sistema planeta-satélite (que a su vez rota alrededor del Sol...).

Un cuerpo libre puede estar precesando si rota en torno a una direccion diferente a sus ejes principales de inercia. En ese caso $\vec{L}$ se mantiene fijo y $\vec{\omega}$ y los ejes de inercia precesan en torno a $\vec{L}$. Este es el movimiento libre Euleriano y genera el movimiento de los polos conocido como movimiento de Chandler en el caso terrestre. Un asteroide que recibe un impacto experimentara este movimiento de precesion libre luego del impacto.

Un cuerpo extenso experimenta mareas por variación de la aceleración gravitacional asociada a otra masa. Si no es rígido se deformara. Si las mareas superan la cohesión interna del cuerpo éste se destruye. El límite de Roche se obtiene siguiendo esta idea pero aplicado a un cuerpo que se aproxima a un planeta considerando ademas la rotación del cuerpo y su forma de equilibrio elipsoidal previa a la disrupción.

El concepto de mareas también es aplicable a la órbita lunar acelerada por el Sol. Si la órbita fuera muy grande las mareas solares serian comparables a la atracción terrestre y la Luna escaparía. La aceleración generada por el Sol en la Luna es mayor que la atracción terrestre (quien también experimenta la aceleración solar). Lo que mantiene ligada la Luna a la Tierra no es la pequeñez de la aceleración solar sino la pequeñez de la marea solar en el sistema Tierra-Luna. Si la Tierra y la Luna estuvieran aceleradas con la misma aceleración no tendríamos manera de determinar esa aceleración, es el principio de equivalencia. Solo la existencia de mareas nos permiten determinar el campo.

# 4 Problema de 2 cuerpos

No podemos escribir la ecuaciones tomando como origen uno de ellos pues no es inercial. Pero tomando el baricentro y planteando las ecuaciones para ambos y restando obtenemos la ecuación del movimiento relativo. Por eso aparece la suma de las masas y no el producto como algún despistado supondría. La ecuación es la que ya conocemos y sabemos que la solución es una cónica. Conociendo la solución del movimiento relativo podemos obtener el movimiento de cada una respecto al baricentro. La excentricidad es la misma para todas esas cónicas pero el semieje no. Y son coplanares.

Operando vectorialmente con la ecuación de movimiento encontramos un vector constante $\vec{P}$ que apunta hacia el pericentro.

Al ver movimiento central obtuvimos $r(\theta)$ pero no la dependencia con el tiempo. Para esto tenemos que plantear el problema según sea elipse, parábola o hipérbola. Se define un angulo auxiliar anomalía excéntrica $E$ para la elipse y la $F$ para la hipérbola. En ambos casos la solución implica un método numérico de iteracion. En el caso parabólico hay una solución analítica explicita. Haciendo un cambio de variable exotico ($d\tau = \frac{1}{r}dt$) es posible resolver la ecuación genérica utilizando un mismo procedimiento para las 3 cónicas. Es la solución universal de la ecuación de la cónica.

El plano orbital se ubica en el espacio mediante 2 ángulos: inclinación $i$ y longitud del nodo ascendente $\Omega$. Dentro del plano el argumento del perihelio $\omega$ indica la dirección del eje de la cónica. Hasta ahora definimos 3 ángulos y los parámetros $a$ y $e$. Falta un ultimo parámetro $T$ que indica el instante de pasaje por el periastro. Esos 6 parámetros o elementos orbitales definen el movimiento.

Los 6 elementos orbitales se obtienen a partir de los vectores iniciales posición y velocidad. Dados los elementos orbitales podemos calcular las efemérides. Para esto en el caso de hipérbola y elipse es necesario resolver la ecuación de Kepler numéricamente por iteracion, obteniendo el angulo auxiliar $F$ o $E$ y luego $r, \theta$.

Para el caso hiperbólico podemos definir el parámetro de impacto $\sigma$ que es la distancia de la asintota al foco de la hipérbola. Resulta útil pues el momento angular es igual al producto del parámetro de impacto por la velocidad al infinito. En el caso de cuerpos no ligados la velocidad al infinito y el parámetro de impacto definen la energía y momento angular orbital mutuo por lo que la trayectoria queda definida.

# 5 Dinámica de vuelos espaciales

La aceleración respecto al suelo de un cohete en movimiento vertical es mayor cuanto mayor sea la velocidad de eyeccion de los gases respecto al cohete $v_e$ y la tasa de consumo de combustible. Esa aceleración tiene que ser positiva de lo contrario no despega. Recordemos que no es posible sentir un campo gravitacional uniforme, solo podemos sentirlo si hay mareas. Lo que sentimos es la reacción que se aplica en nuestros puntos de apoyo. Con los motores apagados el astronauta es acelerado por el campo terrestre y siente un peso debido a la reacción de la nave aplicada en su asiento. A partir del despegue el astronauta experimenta un peso proporcional a $g + dv/dt$ debido al efecto del empuje del cohete. Una vez en órbita al apagar los motores no siente peso pues no siente ninguna fuerza aplicada en algún punto particular de su cuerpo. La sensación de peso es debida a una aceleración aplicada en algunos puntos del cuerpo que se distribuyen a través de todo el organismo por contacto entre las células. La aceleración gravitacional no se siente como peso pues cada átomo experimenta la misma aceleración. A menos que estemos experimentando mareas, como cerca de un campo intenso como el de un agujero negro.

El $\Delta v$ logrado por un cohete moviéndose contrario a un campo gravitacional sufre perdidas proporcionales a $g\Delta t$ por lo que en el espacio es preferible dar impulsos en direcciones perpendiculares a la dirección de $\nabla V$ y por intervalos de tiempo cortos.

Despreciando las perdidas gravitacionales un cohete típico puede lograr un $\Delta v \sim 5$ km/s por lo que no puede adquirir la mínima velocidad para entrar en órbita terrestre que es la velocidad circular. Para lograrlo se ideo el cohete de varias etapas.

La órbita de transferencia conocida como elipse de Hohmann es una elipse de transferencia de una órbita a otra mediante impulsos perpendiculares al campo gravitacional de forma de evitar las perdidas gravitacionales. Los impulsos pueden ser para incrementar la velocidad orbital o para disminuirla como en el caso de un viaje a un planeta interior.

Para viajar a Marte por ejemplo primero hay que poner la nave en órbita de parking geocentrica. En el momento apropiado darle un impulso para que la hipérbola geocentrica resultante tenga una asintota paralela a la velocidad orbital terrestre y que ademas la velocidad al infinito (respecto a la Tierra) sea tal que su velocidad heliocéntrica resultante sea la adecuada para llegar a Marte. La maniobra debe hacerse en el momento adecuado para que cuando la nave llegue a la órbita Marciana, Marte se encuentre próximo y mas atrás dado que la nave se moverá con velocidad heliocéntrica menor que la de Marte. El encuentro de la sonda con Marte sera una hipérbola planetocentrica y la idea es que en su periastro se le dará un impulso de frenado para colocarla en órbita de parking marciana.

También podemos dejar que el encuentro hiperbólico transcurra y la sonda se alejara de Marte con la misma velocidad planetocentrica al infinito con la que encontró a Marte pero con velocidad heliocéntrica diferente. Desde el punto de vista heliocéntrico la sonda recibió un impulso por el encuentro con Marte colocandola en una órbita heliocéntrica diferente pues sale por una asintota que tiene una dirección diferente a la asintota de entrada. De esta forma una sonda puede cambiar su órbita heliocéntrica sin necesidad de utilizar cohetes (asistencia gravitacional). Sin proponerselo esto es lo que hacen los cuerpos menores cuando se encuentran con los planetas, evolucionando sus órbitas hasta que colisionan con algún planeta, son eyectados del sistema o colisionan con el Sol si su excentricidad tiende a 1 manteniendo una órbita elíptica (el perihelio tiende a cero).

# 6 Problema de tres cuerpos

En el problema restringido circular lo que nos interesa es el movimiento de una partícula sometida al campo generado por el sistema de dos cuerpos masivos en orbita mutua circular. El potencial depende del tiempo por lo cual la energía total de la partícula no se conserva. Sin embargo existe una integral del movimiento, la constante de Jacobi $C$. Esta constante define superficies limites de Hill que no pueden ser cruzadas por la partícula. Las superficies cortan al plano orbital del sistema masivo en la curvas limite de Hill. Si $C$ es muy grande, la partícula esta confinada a las proximidades del planeta o de la estrella o a una región muy alejada de ambos. Si $C$ es menor que cierto valor limite (cercano a 3 para el caso planetario) no habrá curvas limite en el plano y la partícula puede cruzar el plano en cualquier punto.

La constante de Jacobi se puede poner en función de posición y velocidad en el sistema rotante o en el sistema inercial. También se puede obtener una expresión aproximada en función de $(a, e, i)$ que es el parámetro de Tisserand, $T$.

Si existe la posibilidad de encuentro de la partícula con el planeta, la $v_\infty = U$ resulta ser $U = \sqrt{3-T}$ por lo que si $T > 3$ no puede haber encuentros, lo cual se puede comprobar si vemos los MOID y los $T$ de los cuerpos menores respecto al planeta. Si $T < 2.82$, la $U$ es suficientemente grande como para que luego del encuentro pueda haber eyeccion del sistema. Si $T > 2.82$ el planeta no podra eyectar la partícula jamas y su final sera la colisión.

La superficie limite de velocidad cero tiene normales paralelas al gradiente del potencial modificado que experimenta la partícula, entonces una partícula en la superficie de velocidad cero se moverá siguiendo la normal a la superficie. Las trayectorias de un partícula que se aproxima o aleja de una superficie de velocidad cero son perpendiculares a la superficie. En los puntos de equilibrio el gradiente del potencial debe ser cero y lo sera también la normal a la superficie, esto solo puede ocurrir en un punto doble por lo que los puntos de equilibrio son aquellos puntos en donde las superficies se ponen en contacto. Hay 5 y están todos en $z = 0$, el plano del sistema masivo. Al estudiar la estabilidad vemos que solo hay 2 estables: $L_4, L_5$. En los puntos $L_1, L_2, L_3$ el equilibrio es inestable en alguna dirección. Sin embargo son puntos preferidos para colocar sondas espaciales pues con pequeños impulsos es posible mantenerlos próximos al punto de equilibrio.

La distancia de $L_1$ al planeta define el radio de Hill, la máxima distancia a la que puede estar un satélite permanente. Si estuviera mas lejos, su curva limite (correspondiente a su $C$) permitiría acceder al Sol a través de $L_1$ y por lo tanto eventualmente podría escapar del planeta. Un satélite permanente tiene que tener una curva limite que le impida escaparse del planeta, por lo tanto esa región tiene que tener un radio menor al radio de Hill.

Los movimientos en torno de $L_4$ o $L_5$ no son las únicos movimientos periódicos posibles. También es posible la configuración de quasi-satélite. Parece un satélite pues se mueve en torno al planeta pero en sentido retrogrado y, muy importante, por fuera de la esfera de Hill y siguiendo un periodo orbital no coherente con el campo del planeta. El movimiento es el resultado del movimiento relativo entre los 2 movimientos heliocéntricos de la partícula y el planeta. Se trata de una resonancia 1:1, es un objeto coorbital.

Las resonancias ocurren cuando la partícula tiene un periodo orbital conmensurable con el del planeta. En la resonancia $k : k_p$ la partícula completa $k$ periodos orbitales cuando el planeta completa $k_p$. Un caso particular es la resonancia 1:1, o sea el movimiento coorbital. Las oscilaciones en torno a $L_4, L_5$ son un modo de la resonancia 1:1, el otro modo posible de la 1:1 es el movimiento cuasi-satélite. La partícula se mantiene en resonancia debido al efecto gravitacional del planeta que obliga al semieje orbital $a$ de la partícula a oscilar (librar) en torno del valor exacto de la resonancia.

Si consideramos que los 3 cuerpos tienen masa (ya no podemos suponer órbita circular) se prueba que dados 2 cuerpos masivos el tercero se puede colocar en 5 posiciones de forma que el movimiento resultante sea homografico. Cuando la tercer masa tiene a cero esos 5 puntos son los 5 puntos de equilibrio de Lagrange que ya vimos.

# 7 Problema de N cuerpos

El sistema se compone de 3N ecuaciones diferenciales de 2do orden para las 3N incógnitas (posiciones de los N cuerpos) que se puede llevar a un sistema de 6N ecuaciones diferenciales de 1er orden duplicando el numero de incógnitas (posiciones y velocidades). Si una de las incógnitas se pudiera poner en función de las demás a través de una constante (un vinculo o integral) de movimiento (si existiera) entonces podríamos eliminar esa incógnita y quedarnos con 6N-1 incógnitas. Si hay 6N integrales de movimiento el problema podría resolverse analíticamente. Todo en condicional pues deben darse ciertas condiciones para que pueda ocurrir eso. Y debería (dadas ciertas condiciones) haber una transformación de variables (o una sucesión de transformaciones) tal que las nuevas variables serian 3N constantes (variables acción) y 3N variables que varían linealmente con el tiempo y son cíclicas (variables angulo). Usando los métodos de la mecánica analítica la resolución del problema se centra en la búsqueda de esa trasformación de variables. Delaunay resolvió el problema del movimiento lunar luego de aplicar mas de 200 transformaciones canónicas. Las variables ángulo varían con frecuencias fijas conocidas como frecuencias fundamentales del sistema. En este caso en el espectro de frecuencias de cualquier variable (por ejemplo la excentricidad orbital o el momento angular de algún cuerpo) deberían aparecer nitidamente las frecuencias fundamentales y sus combinaciones lineales. Esto es lo que se conoce como un caso integrable o regular.

Pero solo hay 10 integrales por lo que a partir de 3 cuerpos ya no hay solución analítica. No existe una solución explicita para cada masa, sin embargo el movimiento esta determinado y es único pero para conocerlo habrá que resolver las ecuaciones numéricamente. Esto siempre lleva un error por defectos del algoritmo, del compilador que traduce instrucciones al procesador y por errores y redondeos que hace el procesador. Ademas las condiciones iniciales se conocen con precisión finita. Todo esto hace que a partir de cierto tiempo la solución calculada se aparte notoriamente de la trayectoria real. No sabemos como la naturaleza puede hacer los cálculos en forma tan precisa y rápida, (es un chiste...). Solo se pueden hacer predicciones de valor estadístico.

Hay 2 extremos del problema: N cuerpos de masas comparables (sistema estelar) y N cuerpos donde uno domina (sistema planetario). Las herramientas son diferentes para atacar esos problemas. En el caso planetario si bien no existen las variables angulo-acción por ser caótico, hay variables muy parecidas, por ejemplo los elementos orbitales, que varían muy lentamente. Por lo que en intervalos cortos podríamos suponer que el sistema es aproximadamente integrable y podríamos obtener una solución analítica aproximada. Los elementos $a, e, i$ son bastante parecidos a acciones y los elementos $\Omega, \omega, M$ son parecidos a ángulos. Las frecuencias fundamentales están vinculadas a las frecuencias con que varían $\Omega, \omega, M$. Es un caos acotado o estable.

Para el caso sistema estelar es impensable que pueda existir soluciones analíticas para las trayectorias de cada una de las estrellas, el sistema es plenamente caótico aunque el teorema del virial ayuda a tener una idea de la estabilidad del sistema. En el caso planetario como las órbitas son aproximadamente elipses con foco en el Sol conviene tomar como origen no el baricentro sino el Sol. Esto complica las ecuaciones pues el Sol no es inercial pero se elimina el Sol como incógnita. Un sistema de N planetas si es cuasi integrable debería tener 3N frecuencias fundamentales. Por eso basta con calcular el espectro de una variable cualquiera para saber si se pueden definir frecuencias fundamentales y por lo tanto si el movimiento es cuasi integrable con una solución analítica aproximada. En caso contrario el espectro esta lleno de lineas indistinguibles unas de otras.

## 7.1 Caso planetario

Escribiendo las ecuaciones para cada planeta con origen en el Sol aparecen para el planeta $i$, N-1 funciones perturbadoras escalares, una por cada uno de los restantes planetas. Tienen dimensión de energía potencial. Cada una de esas funciones genera un apartamiento del planeta $i$ del movimiento de 2 cuerpos respecto al sol. Si alguna de esas funciones perturbadoras es pequeña, el efecto perturbador de ese planeta podría despreciarse.

Para definir los elementos orbitales necesitamos un vector posición y un vector velocidad. Pero tenemos libertad para elegir el sistema de referencia para esos vectores. Si tomamos origen en el Sol tendremos elementos heliocéntricos. Si tomamos el baricientro del sistema tendremos elementos baricenricos. Y no son los únicos posibles. Por ejemplo podemos hacer un sistema híbrido con origen en el Sol para los vectores posición y origen en el baricentro para las velocidades. En el sistema solar los cuerpos interiores a la órbita de Júpiter presentan elementos heliocéntricos mas constantes que los baricentricos. Los cuerpos exteriores a Neptuno presentan elementos baricentricos mas consantes que los heliocéntricos (ver http://www.astronomia.edu.uy/depto/mece/helbar.html.

También podríamos tomar como origen un planeta. Esto es conveniente en caso de una partícula que se acerca a un planeta. Si la partícula esta muy cerca del planeta convendrá resolver su movimiento en un sistema planetocentrico. El limite de distancia esta definido por la esfera de actividad o de influencia. Dentro de la esfera de influencia de un planeta el movimiento es mas planetocentrico que heliocéntrico. O sea, los elementos orbitales planetocentricos varian menos que los heliocéntricos.

## 7.2 Integradores numéricos

La solución numérica se obtiene integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento. En el caso planetario la aceleración total de un cuerpo es la del Sol mas las de los demás planetas. La del Sol tiene solución analítica explicita por lo que en cada paso de integración solo hay que resolver numéricamente la perturbación de los planetas que es del orden de 1000 veces menor que la del Sol por lo que el paso de integración puede ser grande y de esta forma se logran soluciones validas por cientos de millones de años.

## 7.3 Teoría de perturbaciones

En vez de resolver numéricamente las coordenadas cartesianas, que varían muy rápido y por tanto requieren paso de integración muy corto podemos resolver la evolución temporal de los elementos orbitales, que varían muy lentamente y por lo tanto el paso puede ser mas grande y el intervalo en que la solución es valida es mucho mayor. El método de Gauss permite obtener la evolución de los elementos orbitales de un cuerpo sometido a pequeñas aceleraciones (perturbaciones). Los elementos en cierto instante se llaman instantáneos o osculantes. Como siempre presentan pequeñas oscilaciones de corto periodo se suele calcular el promedio en una revolución orbital obteniéndose los elementos medios y son estos los que nos interesa estudiar su evolución temporal para detectar variaciones sistemáticas.

Si pudo llegar hasta aca es tiempo de pasar al siguiente nivel:
http://www.astronomia.edu.uy/depto/mcma/.