

INVESTIGANDO LA DINAMICA DE SISTEMAS PLANETARIOS

Tabare Gallardo

Departamento de Astronomia
Instituto de Fisica - Facultad de Ciencias
Universidad de la Republica

Uruguay

`gallardo@fisica.edu.uy`

`http://www.fisica.edu.uy/~gallardo`

Contenido

- **Gravitacion Universal**
- **Teoria de Perturbaciones**
- **Integración Numerica de las Ecuaciones de Newton**
- **Vuelve la Teoría**
- **Caos**
- **Hoy y Aqui**
- **Creditos**

Gravitacion Universal

Campo Generado por el Sol

Consideremos al Sol aislado de los demas cuerpos del universo. De acuerdo a la Ley de Gravitacion Universal (Newton, craneada ~ 1666 , publicada 1687) el campo de aceleracion generado es:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM_{\odot} \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla V$$

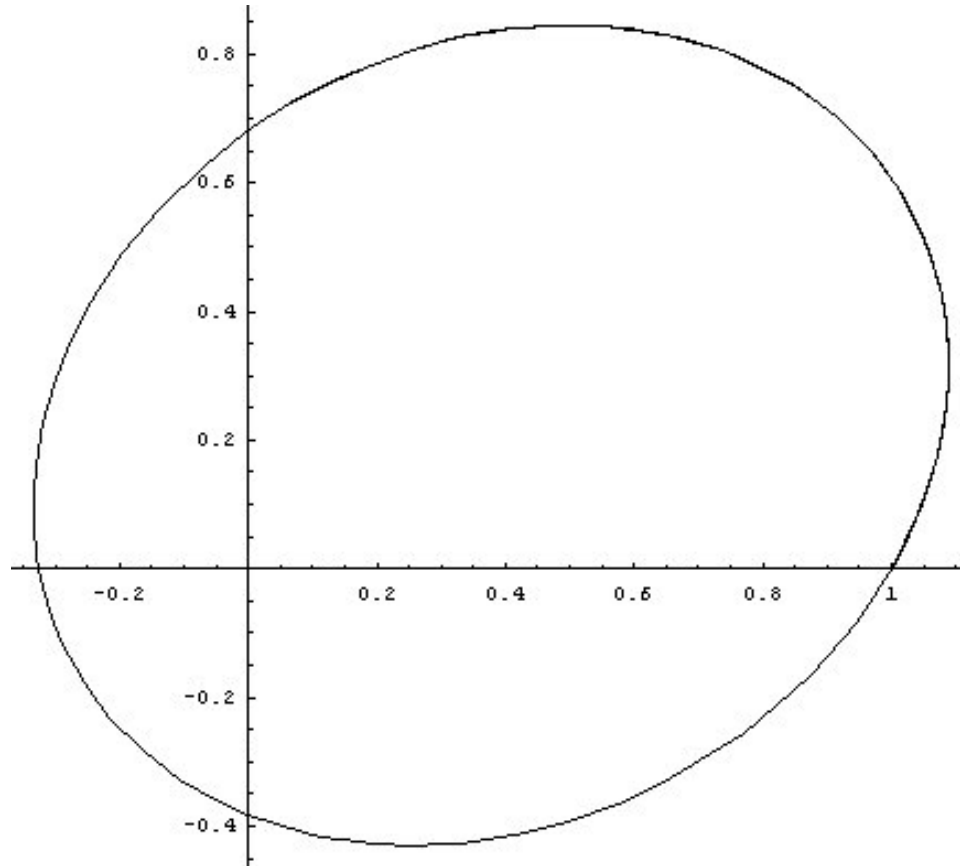
$$V = -\frac{GM_{\odot}}{r}$$

Esta ecuacion admite las integrales de movimiento:

$$\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \vec{h}$$

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\odot}}{r}$$

y la solución $\vec{r}(t)$ es una conica de semieje mayor a y excentricidad e , que para el caso de los cuerpos ligados al Sol ($\mathcal{E} < 0$) son elipses:

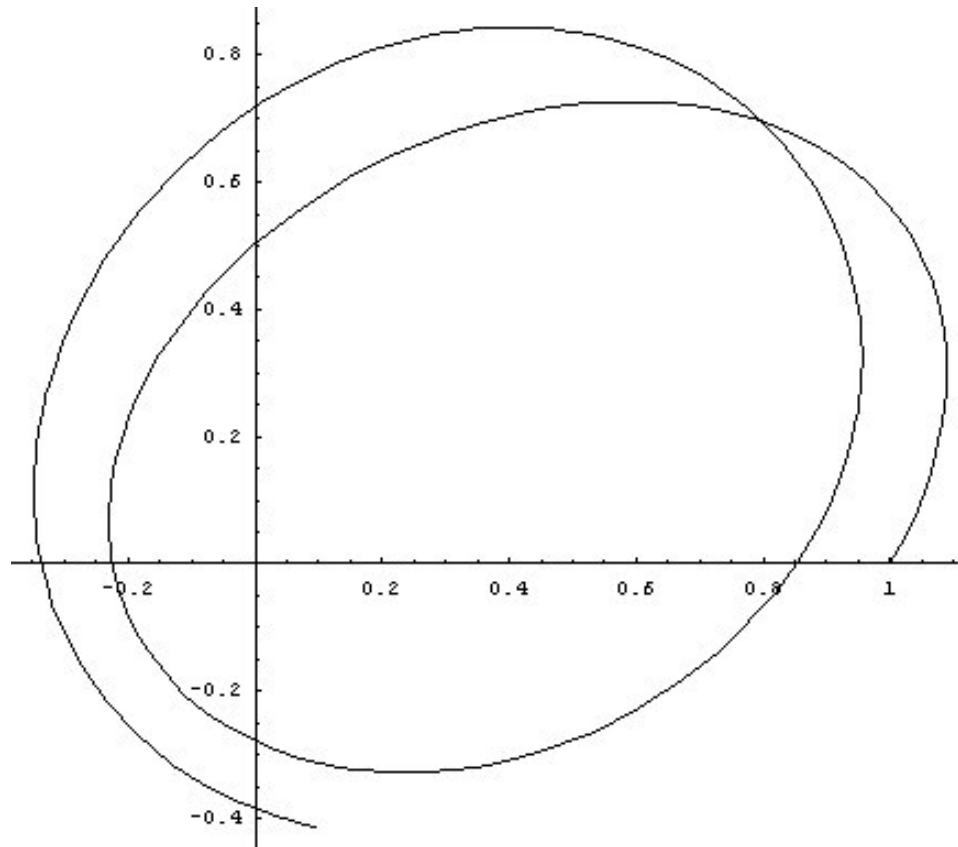


Sol achatado

Si el Sol no fuera exactamente esferico su campo gravitacional seria mas complicado:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM_{\odot} \frac{\vec{r}}{r^3} + \nabla R(\vec{r}, t)$$

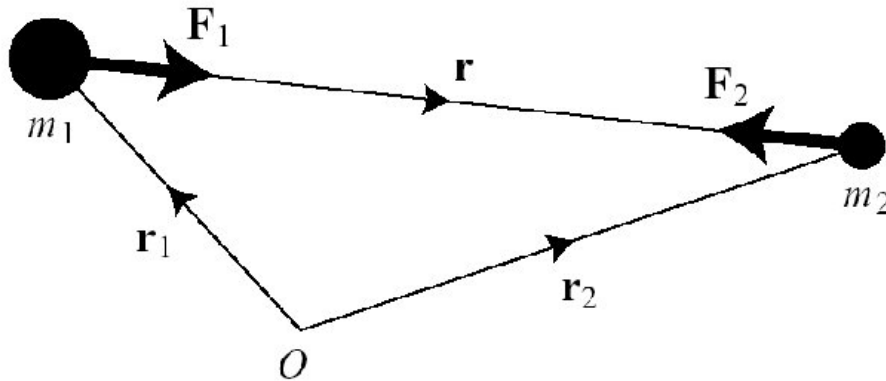
y el movimiento resultante seria una conica "perturbada", siendo R la **Funcion Perturbadora**.



La evolucion de la orbita puede ser descripta a traves de las funciones
 $a(t), e(t)$

Sol + Planeta: Problema de 2 Cuerpos

En este caso el Sol no está fijo (no es un origen inercial) pues está acelerado por el campo generado por el planeta. Para plantear las ecuaciones debemos elegir un origen inercial.



(Tomada de Carl Murray)

$$\vec{F}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = +Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$
$$\vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

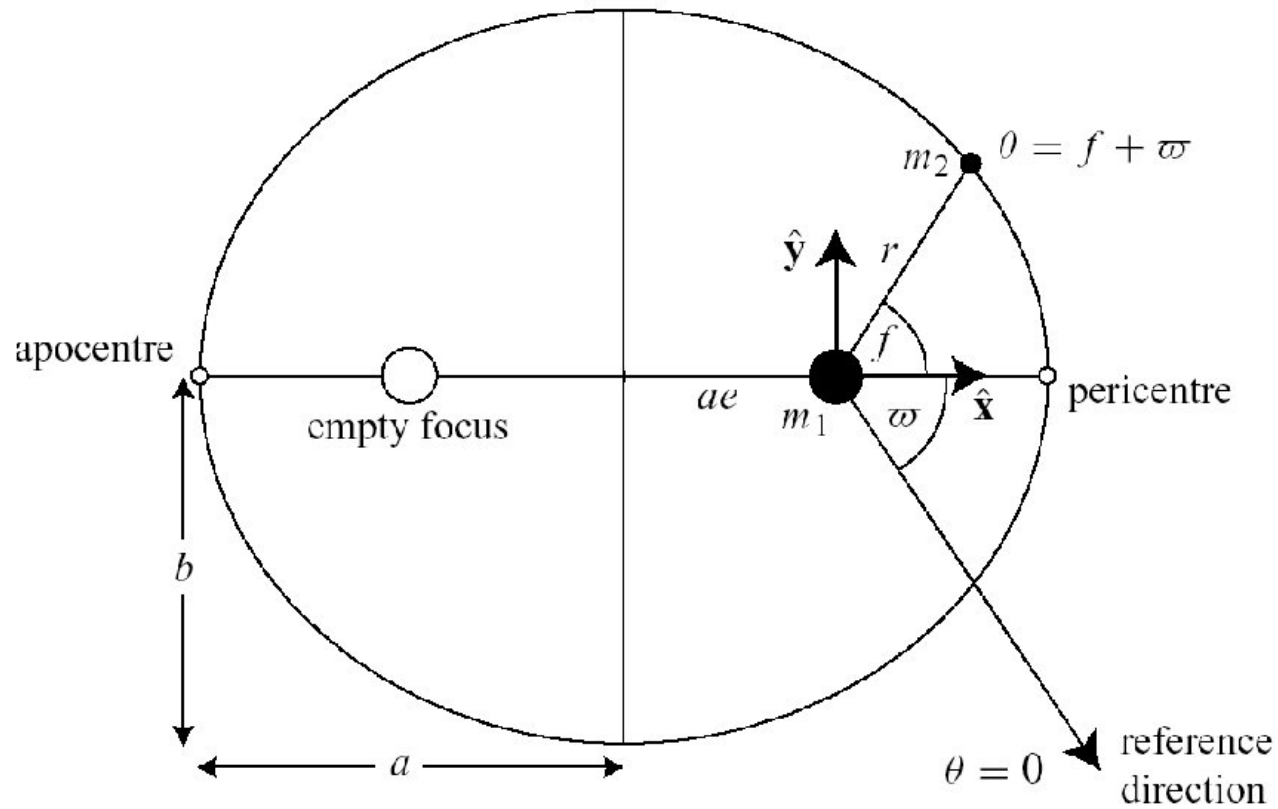
donde $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ es el vector posicion relativa. Operando:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_2}{m_1} = -G(m_1 + m_2)\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\implies \ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

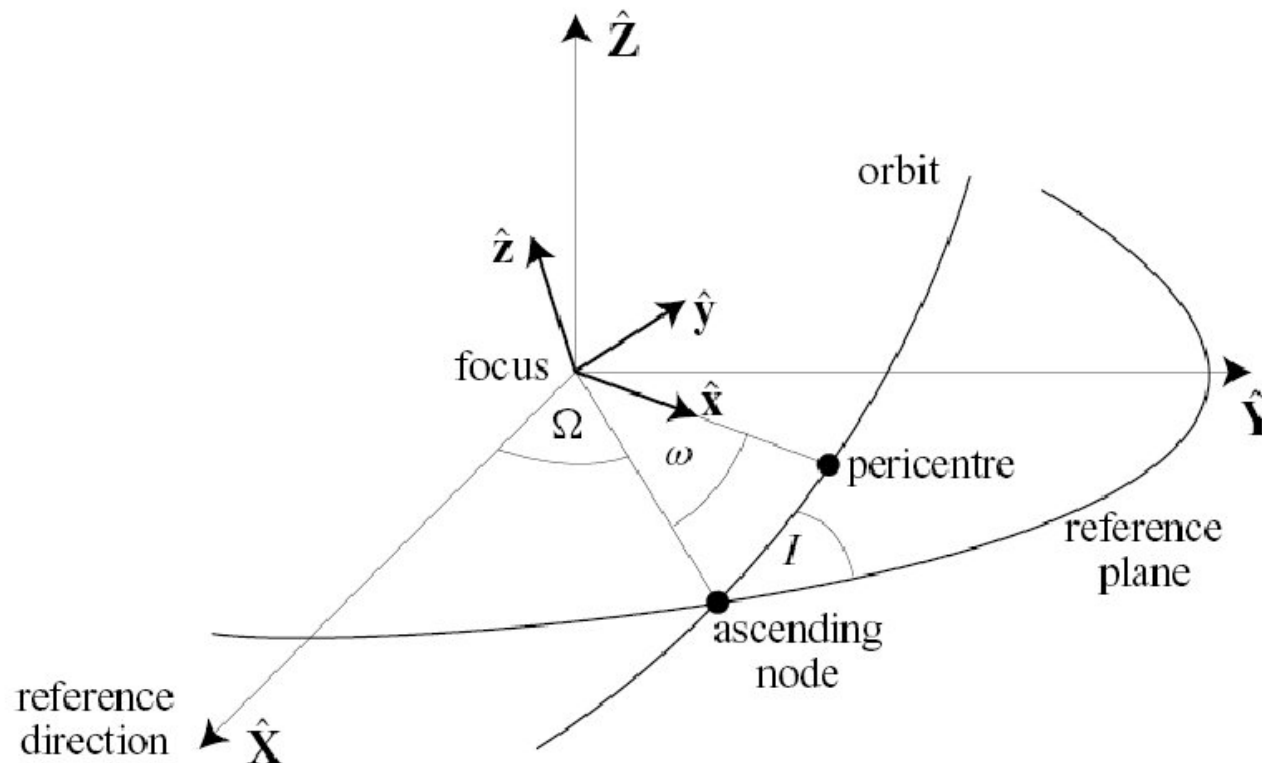
que es la ecuacion del **movimiento relativo** y que tambien genera trayectorias con forma de conicas.

Orbita en su plano



(Tomada de Carl Murray)

Orbita en el Espacio



(Tomada de Carl Murray)

La orbita relativa queda definida con 6 parametros llamados **elementos orbitales**, de la misma forma que la ecuacion diferencial necesita 6 valores para las condiciones iniciales para definir el movimiento.

$$[x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)] \longrightarrow [a, e, T, i, \varpi, \Omega]$$

El problema de 2 cuerpos permite una descripción aproximada (pues despreciamos las influencias de todos los demás cuerpos) del movimiento de un planeta, cometa o asteroide en órbita heliocéntrica, un satélite en órbita planetocéntrica, el encuentro entre una sonda espacial y un planeta, etc.

Problema de N Cuerpos

Si $N > 2$ el problema no tiene solución analítica.

Debemos resolver (integrar) numericamente el sistema de $3N$ ecuaciones diferenciales de segundo orden. De esta forma obtenemos para cada cuerpo:

$$[x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)]$$

Si existe un cuerpo (Sol) que domina gravitacionalmente el sistema tendrá sentido definir órbitas heliocéntricas instantáneas ("osculantes") perturbadas por los demás cuerpos (planetas):

$$[x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)] \implies [a(t), e(t), T(t), i(t), \varpi(t), \Omega(t)]$$

resultando que los elementos orbitales "osculantes" tendrán una **evolución temporal**.

Sistemas Planetarios

Problema de N cuerpos planetario:

Estrella central:

- domina gravitacionalmente el sistema
- masa grande

Planetas:

- afectan gravitacionalmente a todos los demas cuerpos
- masa no despreciable

Cuerpos Menores:

- NO afectan gravitacionalmente a los demas cuerpos pero SÍ son afectados por los planetas
- masa ≈ 0

Evolucion de Sistema Planetario

El movimiento de cada cuerpo queda determinado por:

- ecuaciones de movimiento respecto a un sistema inercial
- condiciones iniciales: posiciones y velocidades

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales de movimiento siempre pueden ser obtenidas mediante algoritmos numericos conocidos como "integradores orbitales".

Pero tambien es posible hacer un abordaje analitico del problema considerando que el movimiento de un planeta particular es un problema de 2 cuerpos mas una (pequeña) perturbacion dada por R :

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla R(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

Teoria de Perturbaciones

Euler, Lagrange y Laplace

100 años después de la ley de Gravitación Universal, entre 1760 y 1787, se suceden varias interacciones entre estos 3 científicos resultando en la creación del Método de Variación de Parámetros, las Ecuaciones Planetarias de Lagrange, la obtención de expresiones manejables para R y varios trascendentes resultados.



Euler



Laplace



Lagrange

(Tomada de Carl Murray)

Ecuaciones Planetarias de Lagrange (+Euler+Laplace)

Euler-Lagrange, aplicando su metodo de variacion de parametros, en vez de procurar una solucion para las coordenadas de **rapida variacion**

$$[x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)]$$

procuran una solucion para

$$[a(t), e(t), T(t), i(t), \varpi(t), \Omega(t)]$$

que son de mucho mas **lenta evolucion** (de hecho constantes en el problema no perturbado).

Para esto transforman las ecuaciones del movimiento de Newton en ecuaciones en funcion de los elementos orbitales:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\
\frac{de}{dt} &= \dots \\
\frac{di}{dt} &= \dots \\
\frac{d\varpi}{dt} &= \dots \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{dT}{dt} &= \dots
\end{aligned}$$

6 ecuaciones para cada planeta y siendo

$$R = R(a_i, e_i, i_i, \varpi_i, \Omega_i, \lambda_i, t)$$

la **Funcion Perturbadora**, expresion cuya forma original fue dada por Laplace.

En el siglo XVIII existia gran expectativa por conocer las funciones $a(t)$ para los planetas. La pregunta era:

¿El sistema solar se esta comprimiendo hacia el Sol o se esta disipando hacia afuera?

¿Que pasa con las excentricidades e inclinaciones ?

Las "Ecuaciones Planetarias de Lagrange" resuelven el problema de forma elegante pero antes veamos qué es R .

La (Famosa) Funcion Perturbadora

Es muy simple expresar $R(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ pero no es tan sencillo obtener $R(a_i, e_i, i_i, \varpi_i, \Omega_i, \lambda_i, t)$ (Ellis & Murray, 2000). Para esto, a lo largo de la historia empezando por Laplace se han propuesto diversos tipos de desarrollos en series de la forma

$$R = \sum F(a, e, i) \cos[S(\lambda, \varpi, \Omega)]$$

donde las funciones $S(\lambda, \varpi, \Omega)$ son combinaciones lineales de λ, ϖ, Ω . Los λ son angulos de variacion muy rapida

$$\lambda = \varpi + \frac{2\pi}{Per.Orb.}t$$

mientras los ϖ, Ω son de variacion muy lenta (miles de años).

Entonces podemos agrupar:

$$R = R_{CORTO*PER}(a, e, i, \varpi, \Omega, \lambda) + R_{LARGO*PER}(a, e, i, \varpi, \Omega)$$

Evolucion Secular

La evolucion a largo plazo (**Evolucion Secular**) esta determinada por R_{LP} pues los terminos R_{CP} solo producen rapidas oscilaciones en torno a un valor medio que se compensan y anulan. Entonces si tomamos $R \simeq R_{LP}$ tenemos:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R_{LP}}{\partial \lambda} = 0$$

$$\implies a = \text{constante}$$

¡EL SISTEMA PLANETARIO ES ESTABLE!

Resultado de gran impacto presentado con elegancia creciente por Euler, Lagrange y luego Laplace. De las ecuaciones tambien se puede probar que las excentricidades e inclinaciones no crecen sistematicamente sino que oscilan.

Formulacion Hamiltoniana: Delaunay y Poincare

El siguiente y obligado paso en el tratamiento analitico iniciado por Lagrange fue el paso dado por Hamilton, Jacobi, Delaunay y Poincare entre otros quienes transformaron las ecuaciones planetarias en un sencillo sistema de ecuaciones canonicas. Las variables canonicas son funciones de los elementos orbitales, el Hamiltoniano del sistema es simplemente $H = T + U$ y el problema se reduce a encontrar una transformacion canonica (mas bien una serie de transformaciones canonicas) que nos conduzca a las variables angulo-accion del sistema:

$$(\vec{r}, \vec{p}) \Rightarrow^{TC} \Rightarrow (\theta, J)$$

donde $J = cte$, $\theta = \nu \cdot t + cte$ siendo las ν_i las $3N$ **Frecuencias Fundamentales del Sistema**. Pero surgen algunas preguntas....

- ¿existe esa TC?
- ¿existen las ν_i ?

Integracion Numerica

de las

Ecuaciones de Newton

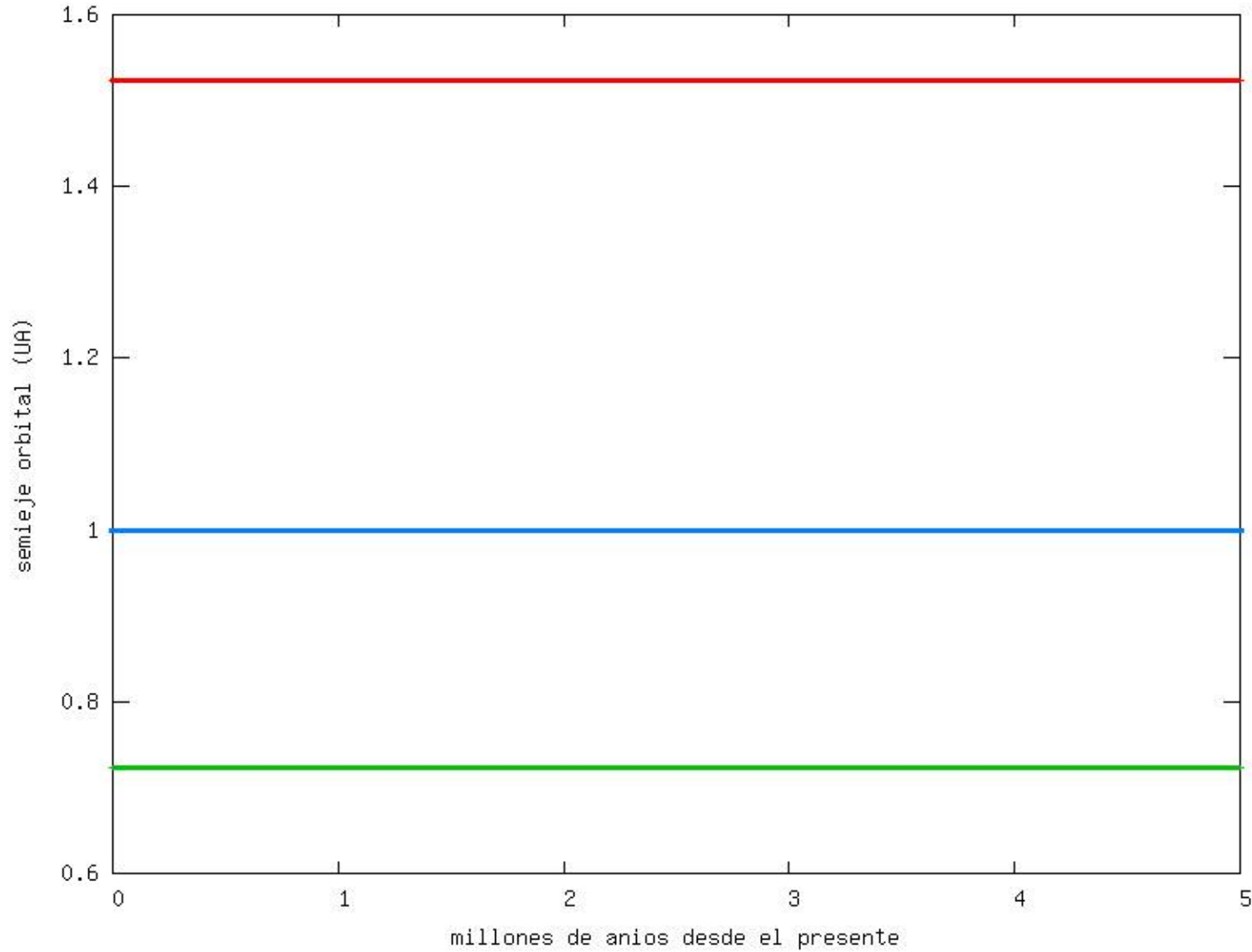
Integradores Orbitales Versus Teoria

En el siglo XVIII era imposible resolver numericamente las ecuaciones exactas del movimiento. Todo lo que podia avanzarse era en el campo teorico. Hoy la situacion esta invertida: numericamente se puede resolver cualquier cosa (hasta colisiones de agujeros negros) pero la interpretacion dinamica de dichas integraciones suele no estar a la altura de los resultados numericos.

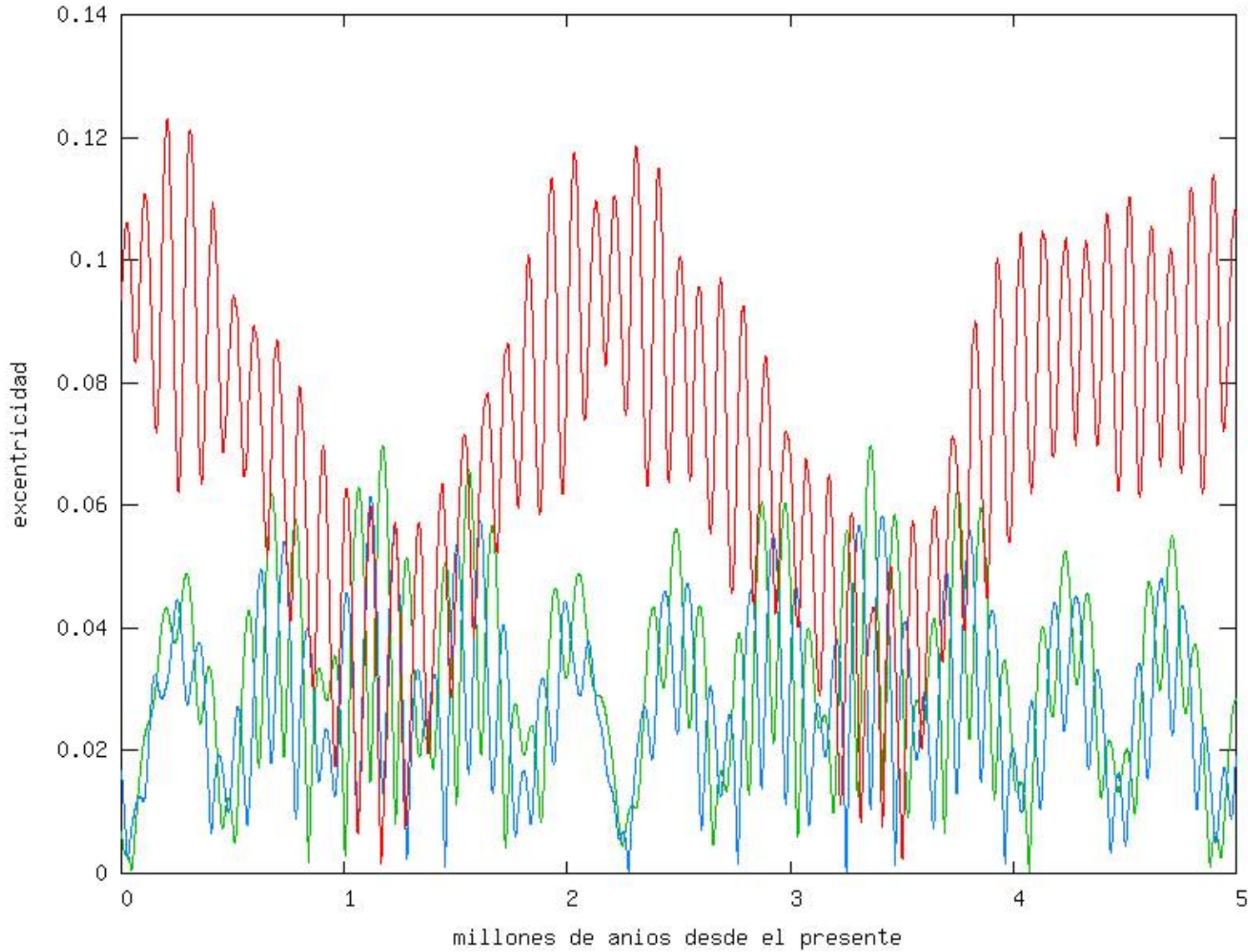
En general, el analisis teorico ya no se usa para obtener soluciones aproximadas sino para **proveer una explicacion dinamica a los resultados numericos**. Excepciones: construccion de modelos analiticos en problemas de alto costo computacional. Algunos integradores disponibles:

- EVORB: Brunini y Gallardo. Leapfrog. Facil manejo. ([link](#))
- MERCURY: Chambers. Simpletico.
- SWIFT: Levison. Simpletico.
- NEWTON: Murison. Excelente GUI pero no disponible aun.

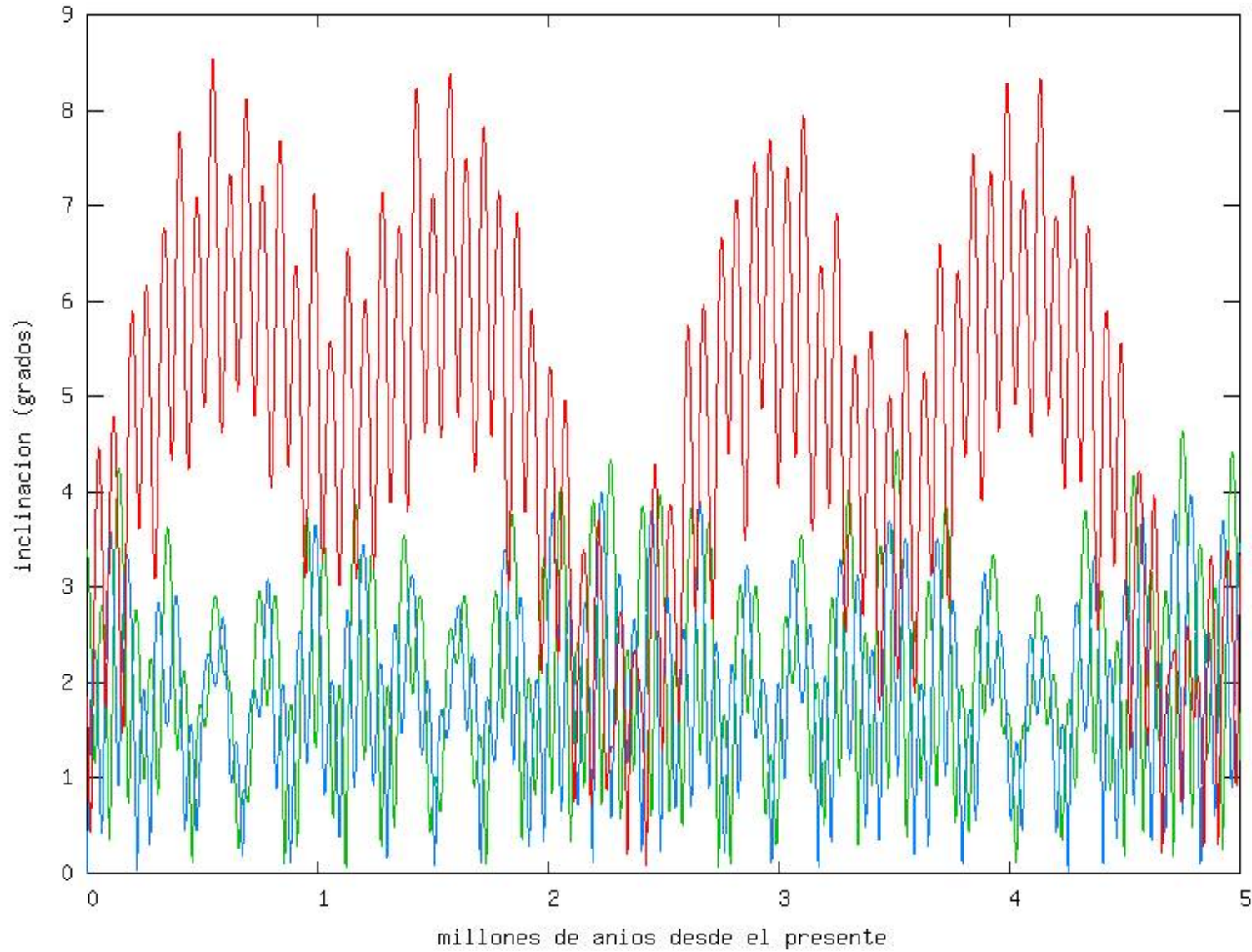
Venus, Tierra y Marte en los Proximos 5 MA: $a(t)$



Venus, Tierra y Marte en los Proximos 5 MA: $e(t)$

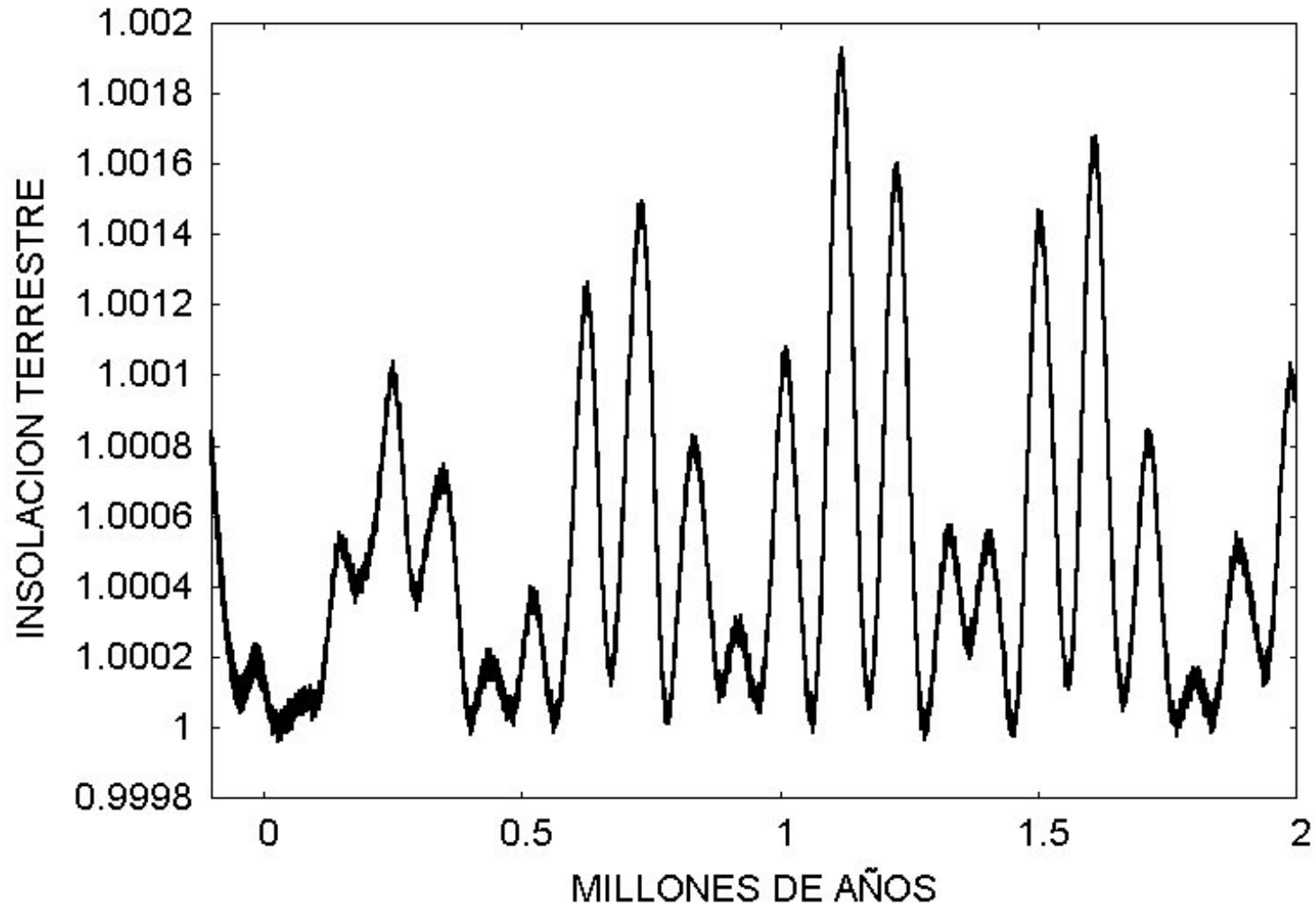


Venus, Tierra y Marte en los Proximos 5 MA: $i(t)$

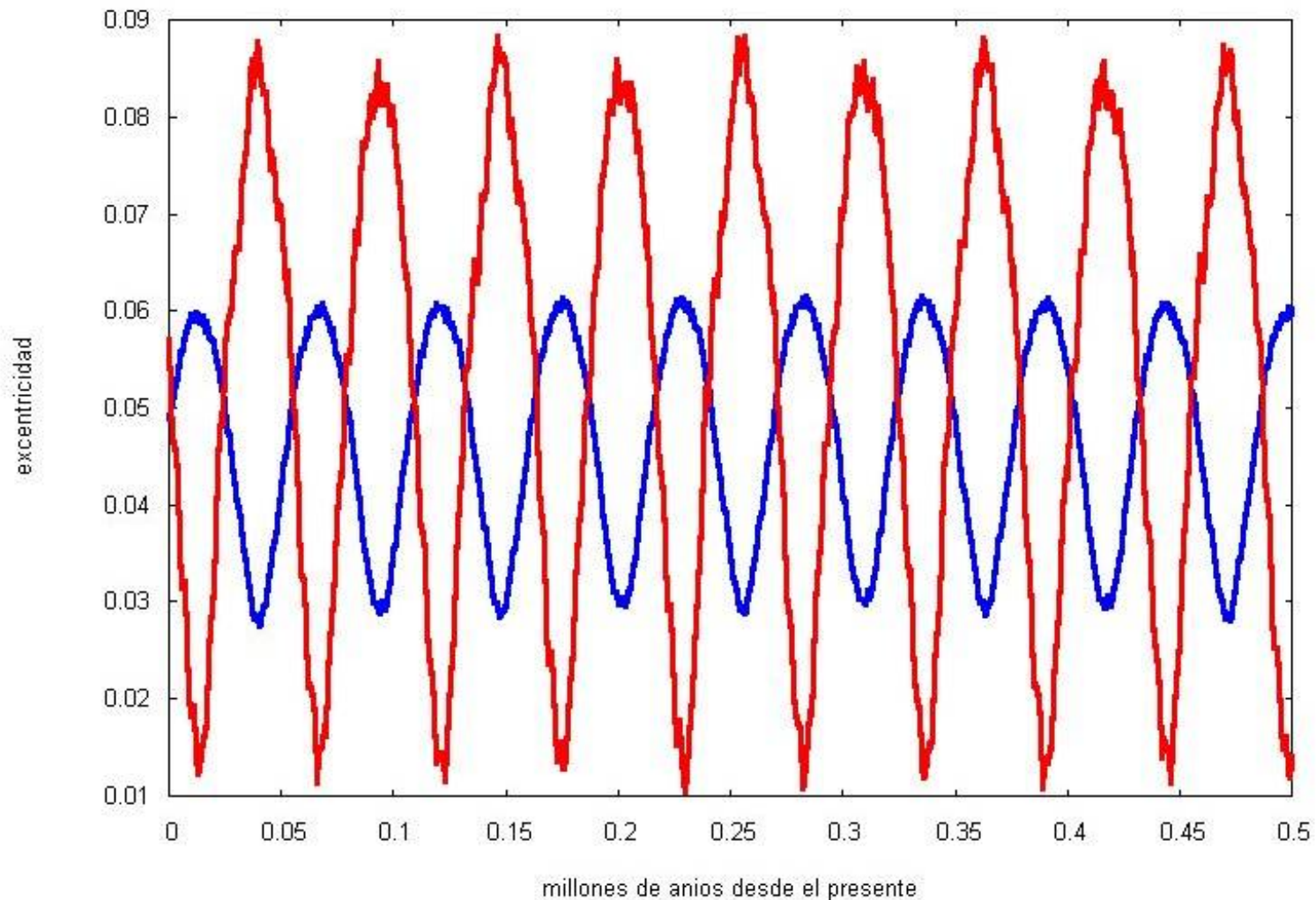


(ver animacion)

$a(t), e(t) \Rightarrow \text{insolacion}(t) \Rightarrow \text{¿cambios climaticos?}$

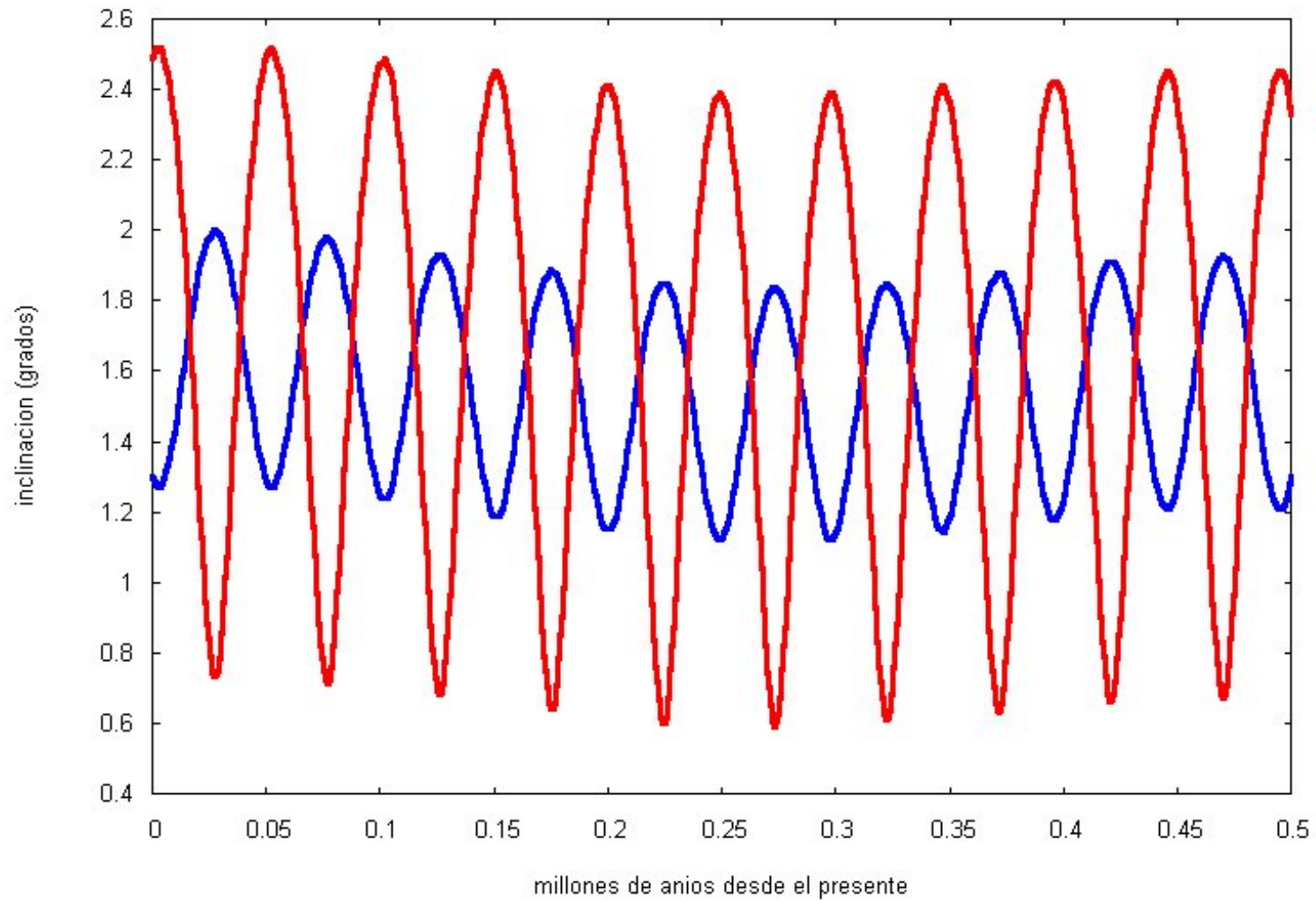


Acople Jupiter-Saturno: excentricidad

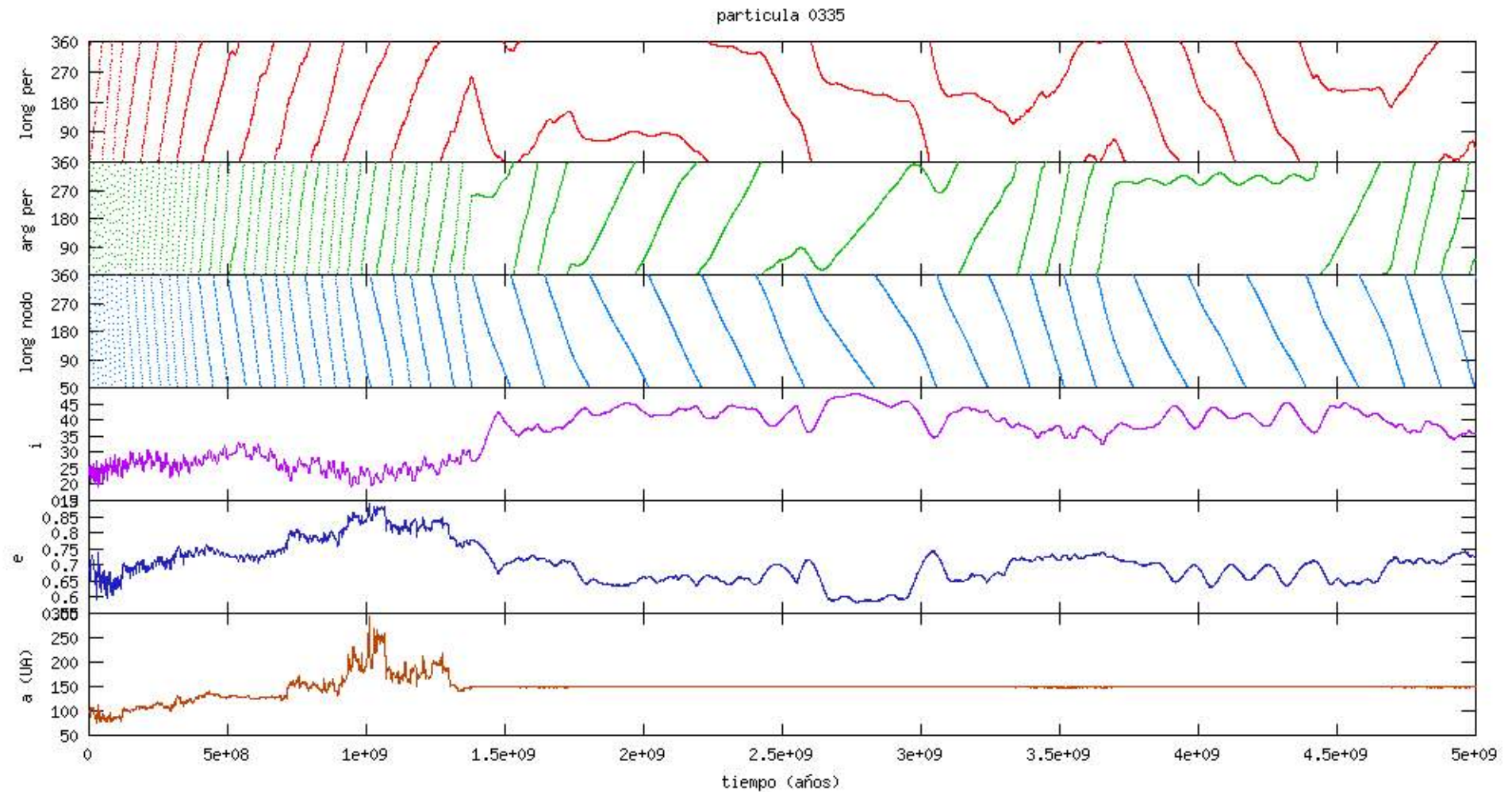


⇒ **cuasi-conservacion del Momento Angular $(m_J \vec{h}_J + m_S \vec{h}_S)$ del sub-sistema Jupiter-Saturno**

Acople Jupiter-Saturno: inclinacion

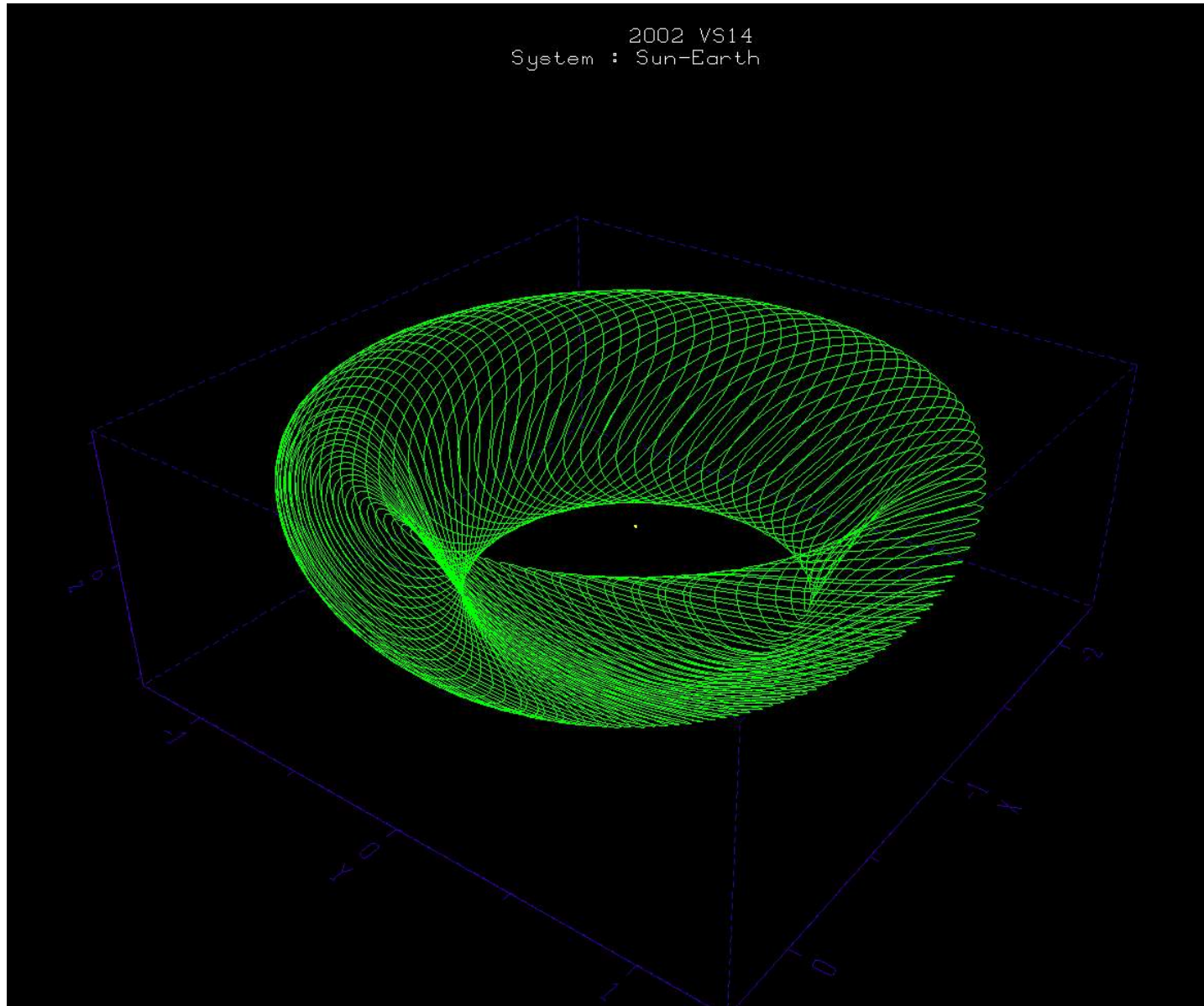


Neptuno y un SDO en los proximos 5000 MA



(ver animacion)

Movimiento de un asteroide respecto al sistema Sol-Tierra (NEAPLOT)



Vuelve la Teoria

¿Tratamiento Analítico? ¿Para Qué?

Parece ser que dado un problema dinámico lo mejor sería realizar una integración numérica de las ecuaciones de Newton. Pero cabe preguntarse

¿por qué los elementos orbitales $[a, e, T, i, \varpi, \Omega]$ evolucionan de esa manera?

Posible y vacía respuesta: por la ley de gravitación universal. Obvio.

Pero podemos intentar algo mejor: podemos recurrir a las ecuaciones planetarias de Lagrange o a su formulación Hamiltoniana para, resolviéndolas, determinar el efecto que produce **cada término** del desarrollo de la Función Perturbadora R y compararlo con la integración numérica. De esta forma podremos explicar la evolución observada en las integraciones numéricas como debida a **terminos bien identificados en el desarrollo de R** que dominan por su magnitud a la función R y por lo tanto a la evolución del sistema. Esos términos dominantes pueden ser causados, por ejemplo, por el movimiento del perihelio de determinado planeta.

Ejemplo: "La Gran Desigualdad" $5\lambda_S - 2\lambda_J$

La evolucion secular de los elementos orbitales obtenida en la aproximacion $R \simeq R_{LP}$ no reproduce exactamente la evolucion secular observada en varios cuerpos del Sistema Solar.

Causa: en $R_{CP}(a, e, i, \varpi, \Omega, \lambda)$ existen terminos que no son de corto periodo (y que fueron eliminados). Los mas notorios son los terminos del tipo

$$F(a, e, i) \cos(5\lambda_S - 2\lambda_J + \dots)$$

Si bien λ_S y λ_J son de variacion rapida, la combinacion $5\lambda_S - 2\lambda_J$ es de **variacion muy lenta** debido a que los periodos orbitales cumplen

$$\frac{P_S}{P_J} \simeq \frac{5}{2}$$

\implies los planetas Jupiter y Saturno se encuentran muy proximos de la **resonancia** 5:2. Si el sistema se encuentra proximo a una resonancia, las combinaciones de λ resonantes no pueden ser consideradas de corto periodo y no pueden ser ignoradas (pasan a la funcion R_{LP}).

Resonancias

Puede parecer absurdo preocuparse por situaciones resonantes, es decir, sistemas con conmensurabilidad exacta entre los diferentes periodos orbitales. Sin embargo existen numerosos ejemplos:

- Luna: spin-orbita 1:1
- Mercurio: spin-orbita (1 día mercuriano = 2 años mercurianos)
- Asteroides con Tierra, Marte y Jupiter ([link](#))
- Satelites Galileanos: Laplaciana $\lambda_I - 3\lambda_E + 2\lambda_G$ y spin-orbita
- Satelites de Saturno
- Satelites de Urano
- Jupiter y Saturno: cuasi resonancia 5:2 (Laplace)
- Urano y Neptuno: cuasi resonancia 2:1
- Neptuno - Pluton: resonancia 2:3

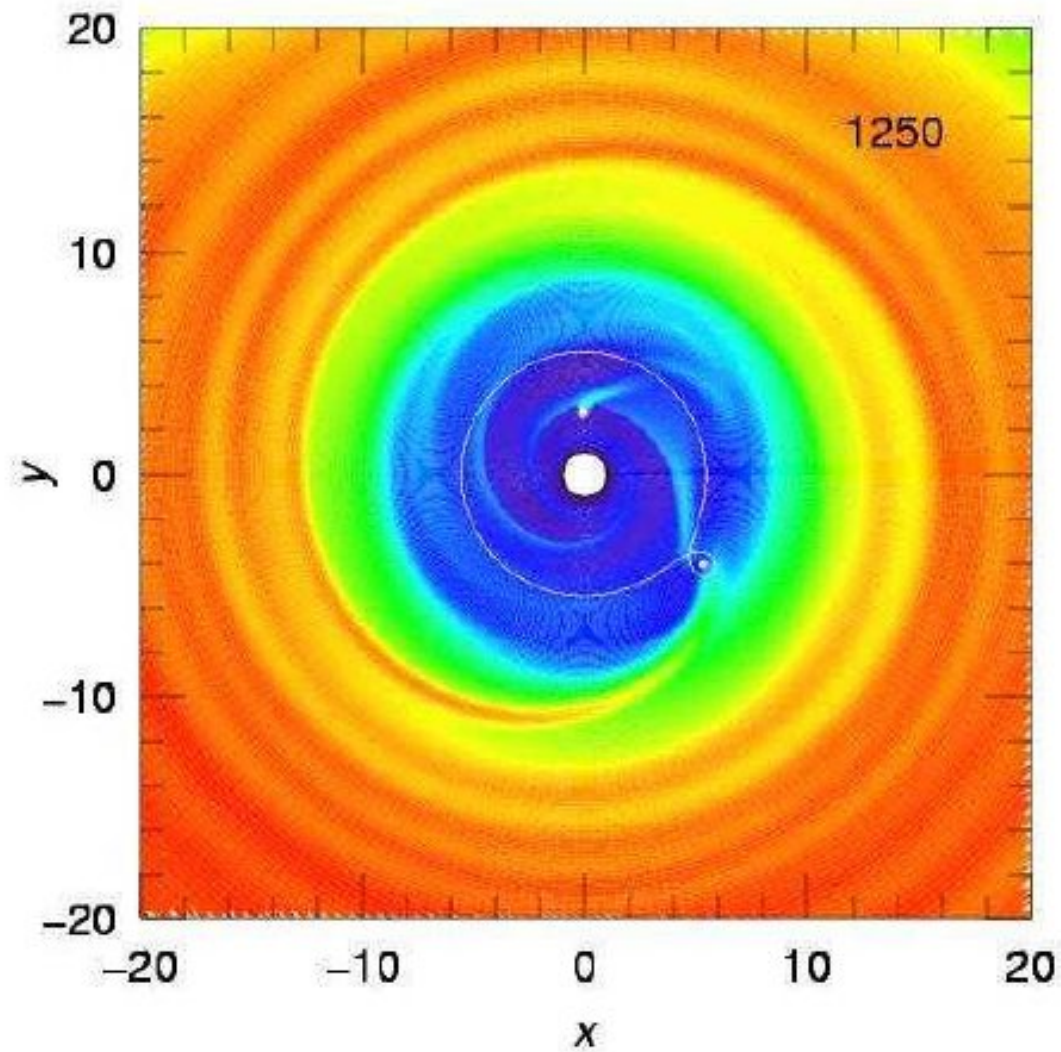
- **Pluton - Caronte: spin orbita**
- **Anillos**
- **Transneptunianos: plutinos, twotinos, etc**
- **Satelites artificiales**
- **Sistemas extrasolares (incluyendo en pulsars)**

¿Por Qué Hay Tantos Casos Resonantes?

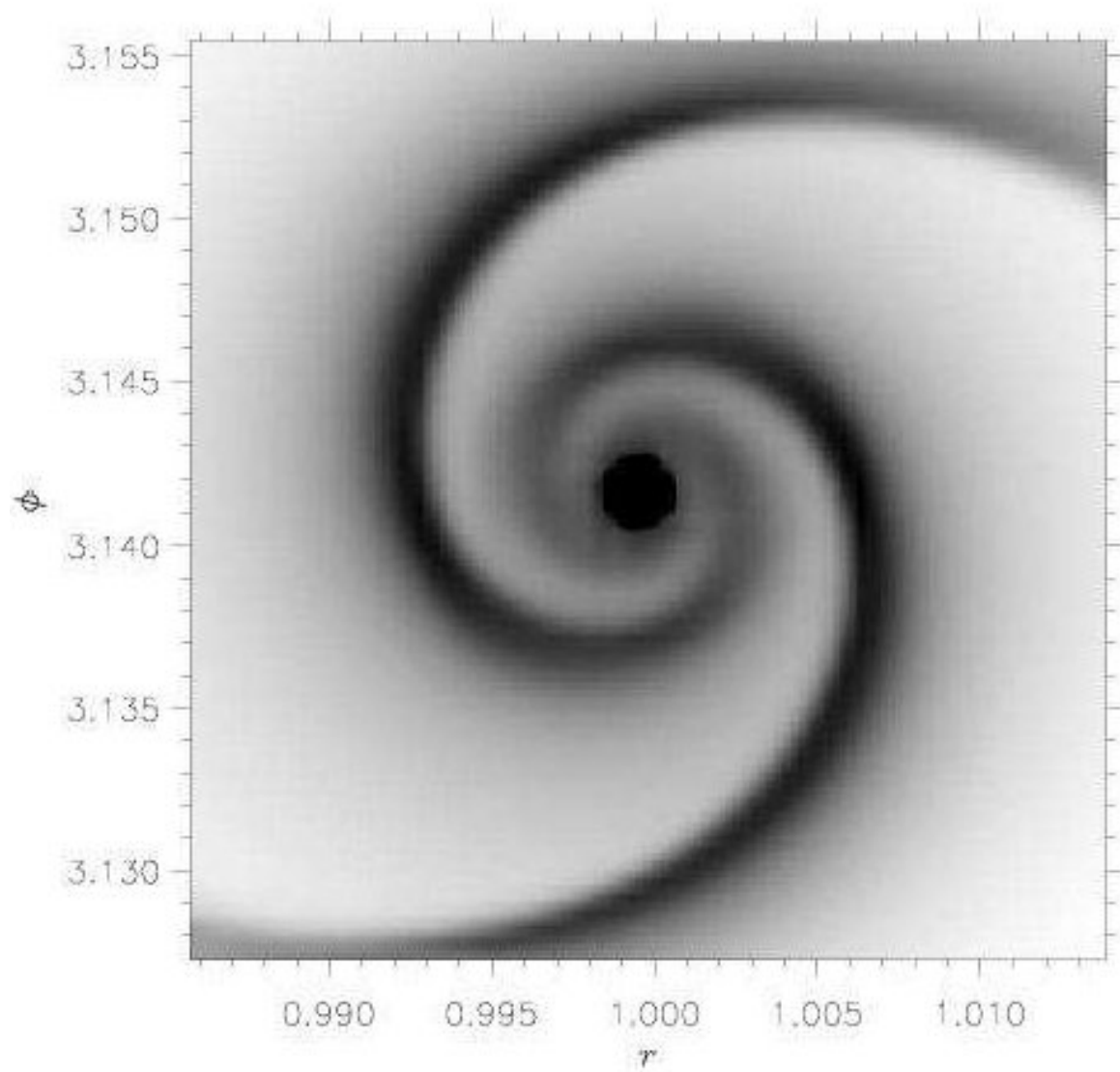
Hemos considerado hasta ahora fuerzas conservativas, derivan de un potencial. Pero si agregamos fuerzas disipativas (mareas, fricción con nube de gas o polvo) las orbitas evolucionan hasta caer en resonancia, luego continúan evolucionando pero manteniendo el vínculo resonante. Otro escenario que conduce a orbitas resonantes es la interacción de los planetas con una extensa población de planetesimales. Esto produce una **MIGRACION ORBITAL** que lleva a la captura en resonancias. ([link](#))

La Migración Orbital fue descubierta por Fernandez & Ip en 1984 mediante la integración numérica de las orbitas de los planetas interactuando gravitacionalmente con una población de planetesimales. Hoy es un campo de INTENSA investigación en el mundo:

Migración de 2 planetas en disco de gas y polvo (Kley, 2004)



Detalle de acrecion en un planeta (Kley, 2004)



Caos

La Estabilidad del Sistema Solar: Caos

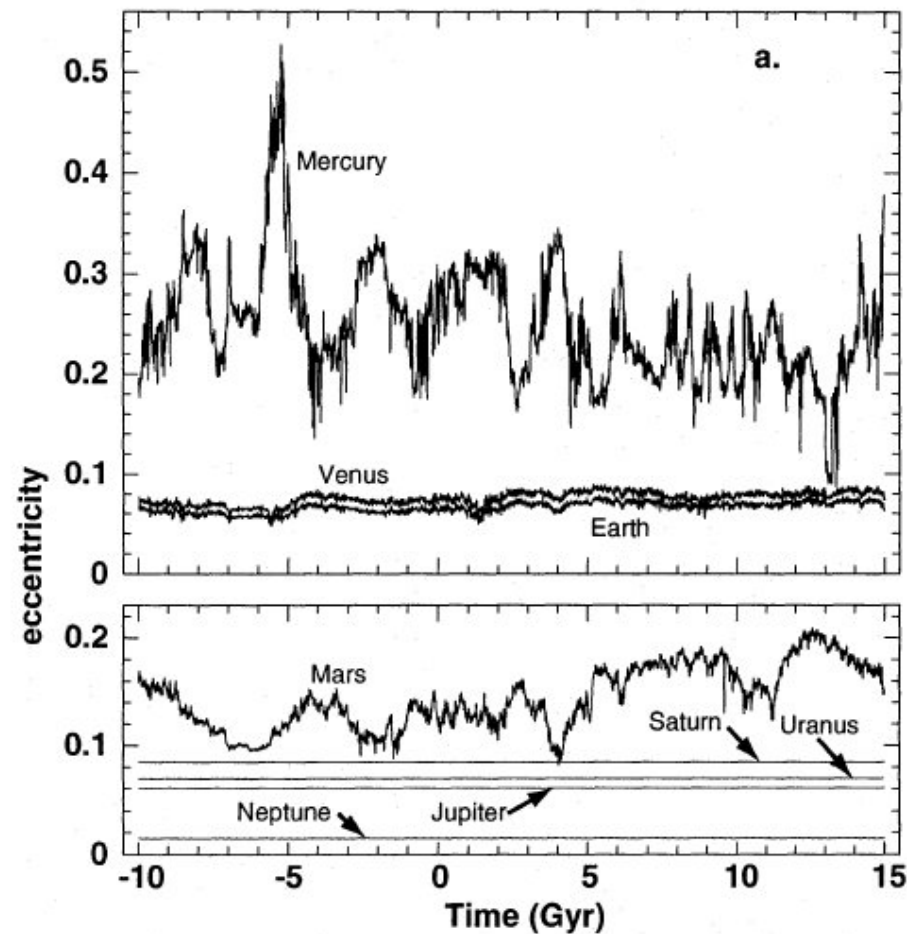
De acuerdo al modelo simplificado de Euler-Lagrange-Laplace, el sistema es estable.

Pero en general rigurosamente no existe solución analítica para el sistema planetario pues no existen suficientes "integrales de movimiento" (como lo requiere un teorema debido a Liouville) para resolver el sistema de $6N$ ecuaciones diferenciales de primer orden. Dicho de forma elegante: **no existe una transformación canónica capaz de llevarnos a las variables ángulo-acción del sistema** (estas no existen, ni tampoco las frecuencias fundamentales).

Aunque no existe una expresión explícita en función del tiempo, la solución **está determinada**. El problema es que para obtenerla necesitamos un procedimiento numérico de infinita precisión, de lo contrario tarde o temprano la solución numérica se empieza a apartar de la evolución real. Como el apartamiento es exponencial...

¡EL SISTEMA PLANETARIO ES CAÓTICO!

Como los **Tiempos Característicos de Lyapunov** son proporcionales a los periodos orbitales, en escalas de GigaA el caos es mas evidente en los planetas terrestres (Laskar 1994):



¿Caotico y Estable? Todo parece indicar que al menos los planetas se encuentran en un regimen de "**Caos Estable**": no podemos predecir con exactitud donde estaran de aqui a 100 MA pero podemos asegurar con mucha exactitud la forma que tendran sus orbitas: **caos confinado**.

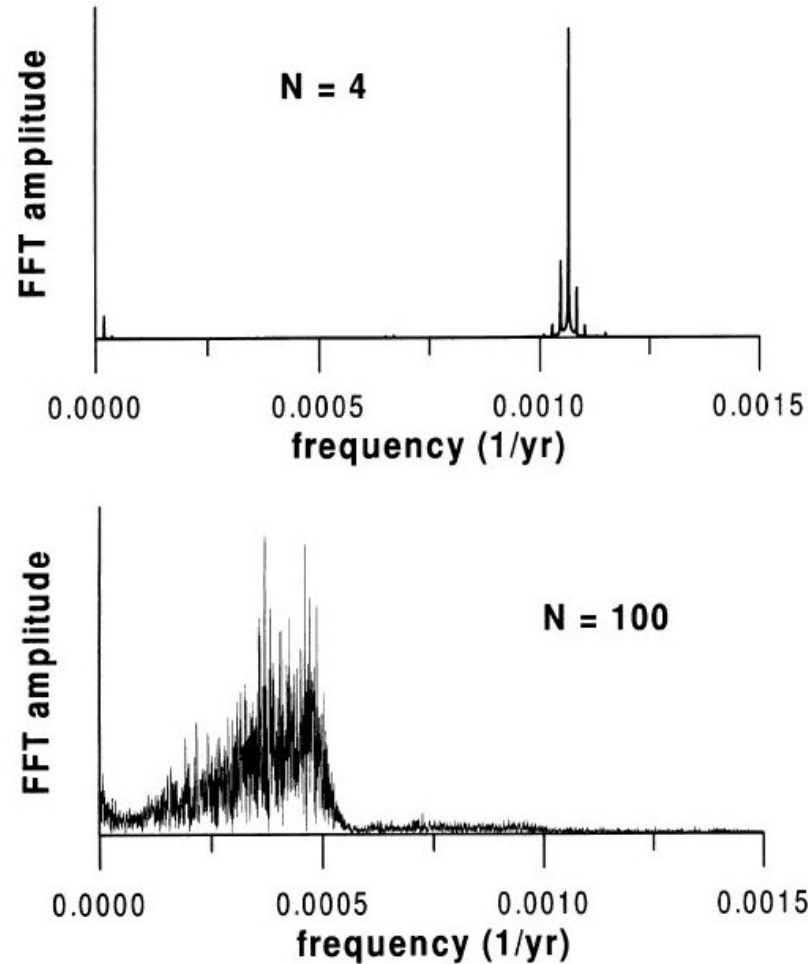
Dado el caracter caotico del sistema solar, si queremos tener una idea de la evolucion de un objeto particular debemos realizar muchas integraciones numericas (nube de clones) y luego analizar estadisticamente los resultados obtenidos.

No fue nada facil probar que no existe solucion analitica para el problema planetario. De hecho la prueba de la no integrabilidad la dio Poincare (1892) al descubrir la divergencia exponencial de soluciones con condiciones iniciales levemente diferentes (caos).

Comportamiento Regular: frecuencias fundamentales bien definidas.

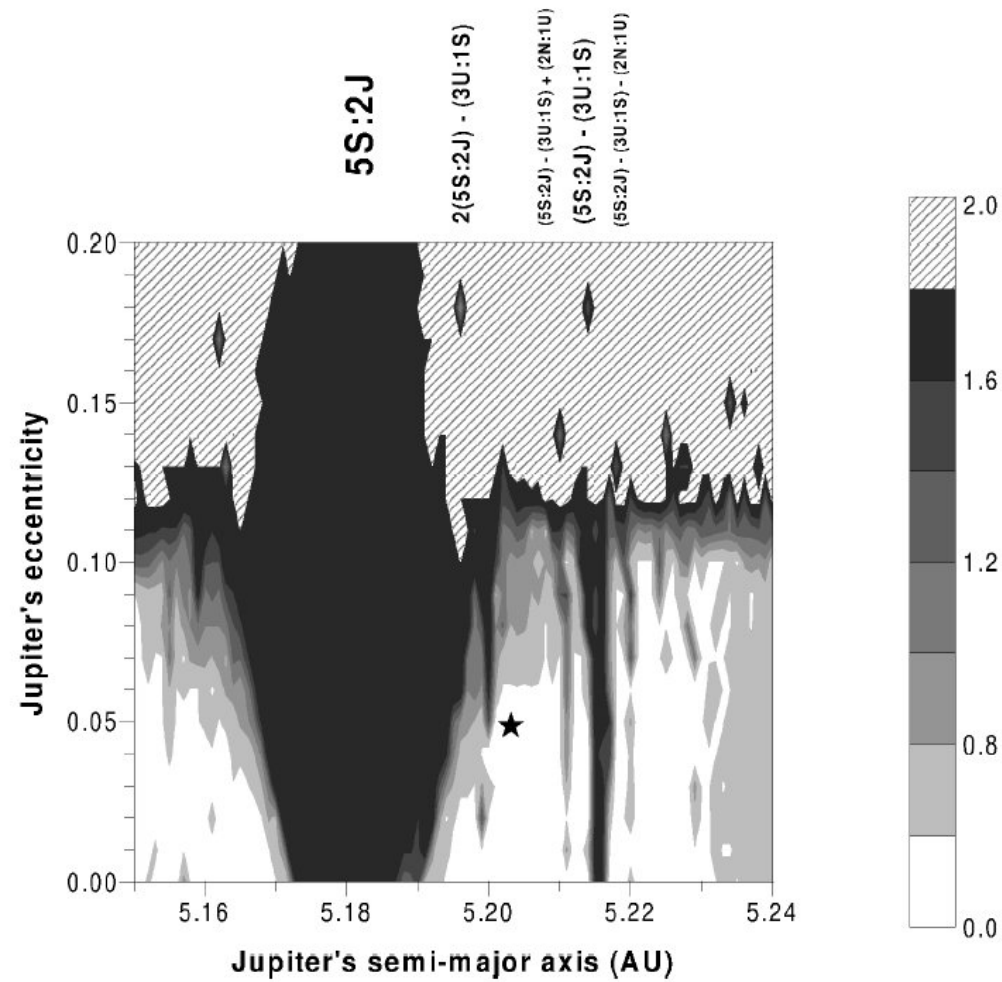
Comportamiento Caotico: no es posible definir frecuencias fundamentales.

Todo el sistema planetario es cuasi-resonante y al borde de una configuracion altamente caotica como lo muestran Michtchenko & Ferraz-Mello (2001) para el caso de los planetas gigantes utilizando el analisis espectral para determinar la existencia o no de frecuencias fundamentales:



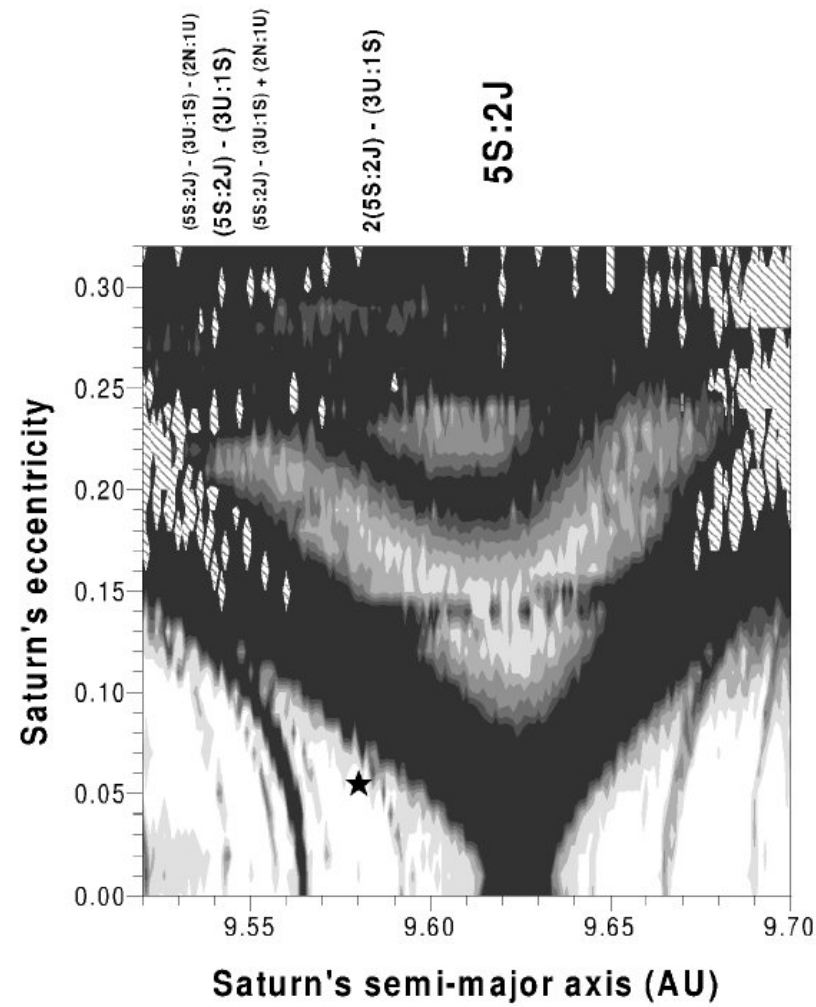
Jupiter

MICHTCHENKO & FERRAZ-MELLO

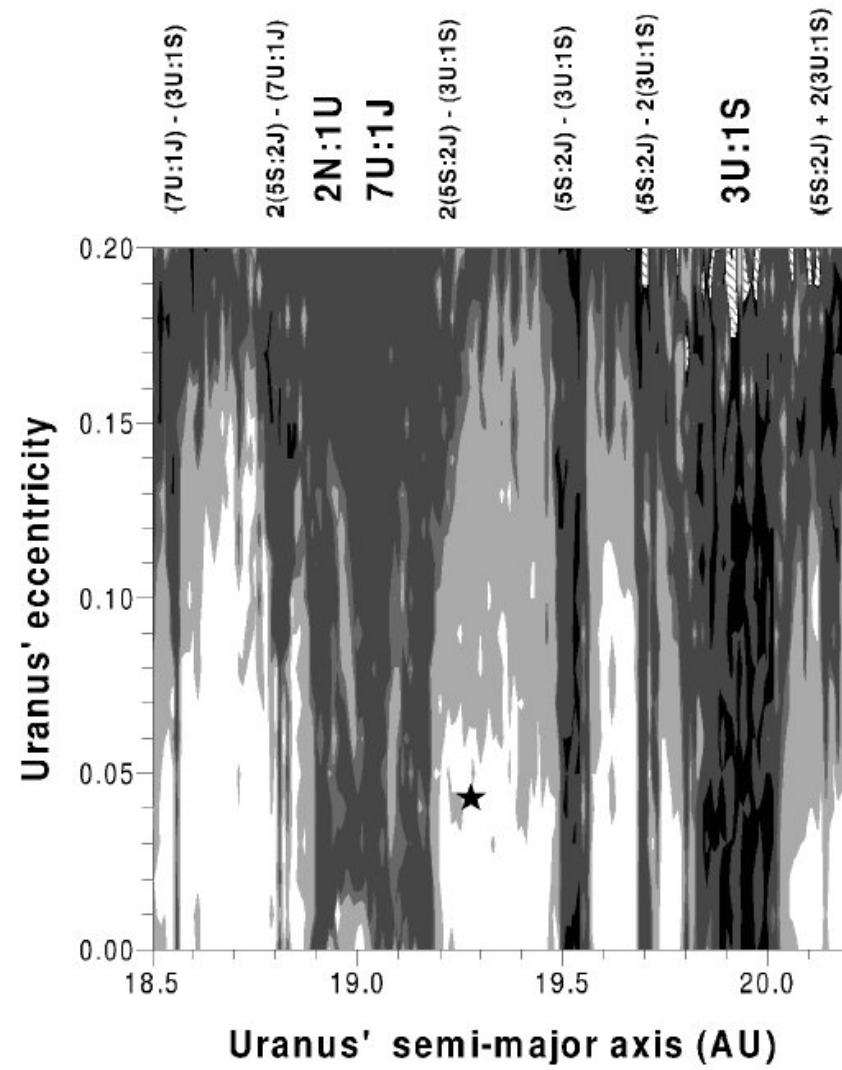


Saturno

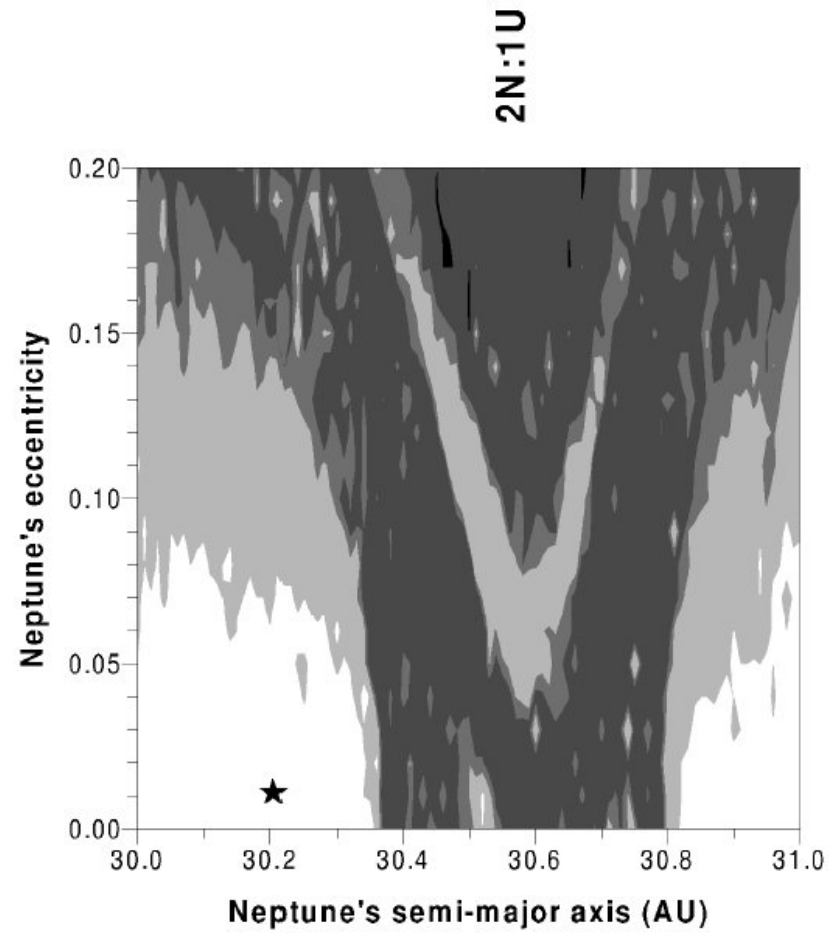
RESONANT STRUCTURE OF THE OUTER SOLAR SYSTEM



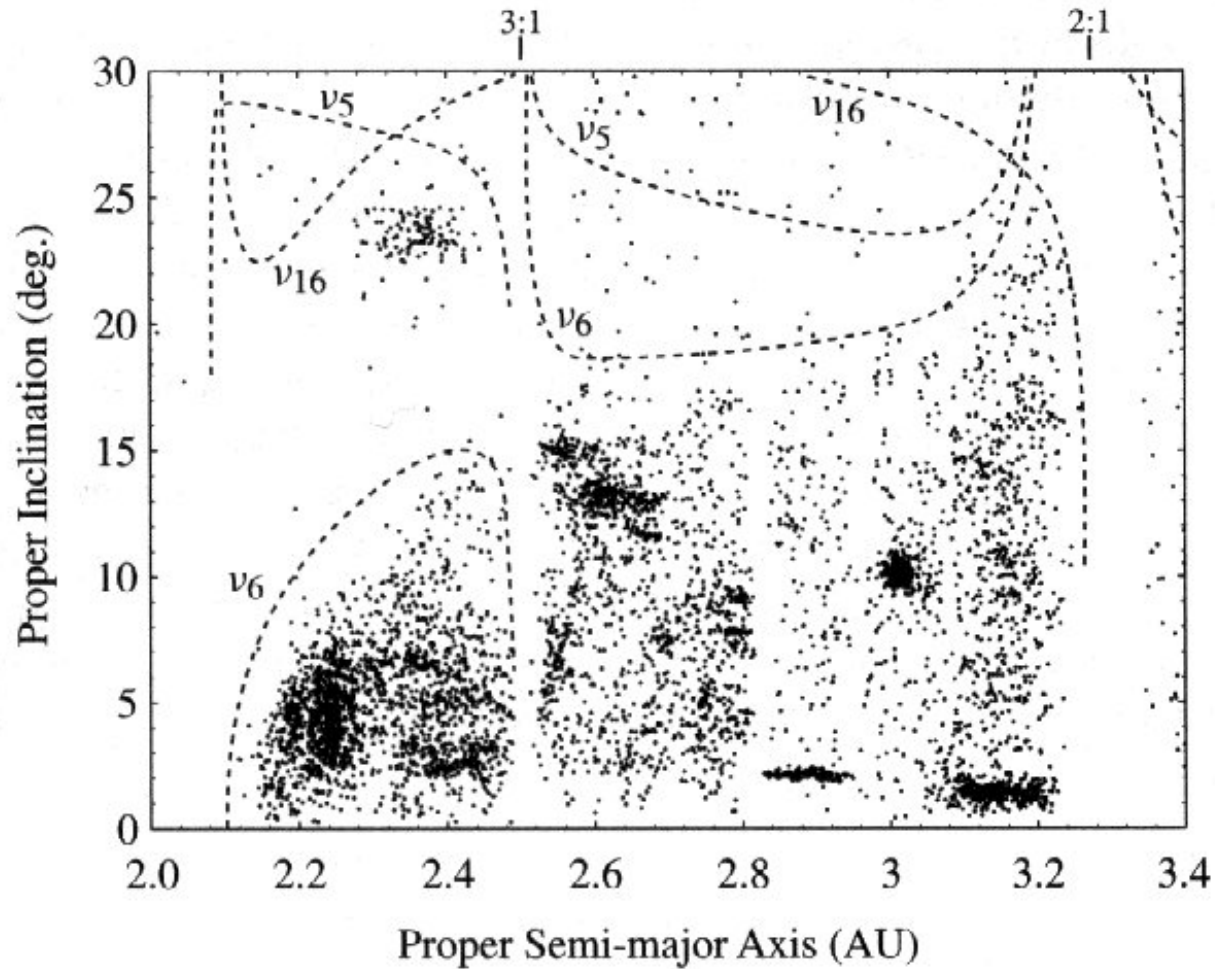
Urano



Neptuno



El caos generado en las resonancias es el principal responsable de la estructura dinamica de todo el sistema solar.



(Milani & Knežević, 1990)

Hoy y Aqui

(y con lo que hay...)

¿Qué Buscamos?

- Una explicación al comportamiento dinámico de ciertos sistemas y poblaciones.
- Determinar regiones de movimiento regular y caótico (cuantificar).
- Calcular tasas de transferencia de poblaciones entre las diferentes regiones (físicas y del espacio de fases) del sistema: IEO, NEA, asteroides, cometas, centauros, transneptunianos, nube de Oort.
- Origen de los objetos y sistemas que hoy observamos y sus posibles caminos evolutivos.
- Predicción de poblaciones de objetos que hoy no observamos (IEO, alta inclinación, transneptunianos, nube de Oort)
- Determinar las fuerzas (efectos de nubes de polvo, gas, planetesimales, pérdida de masa estelar, perturbaciones estelares, potencial galáctico, colisiones) que determinaron la evolución de los sistemas.
- Historia de colisiones y futuro. Por ejemplo en las integraciones se obtiene que en el presente en promedio un asteroide de 1 km o más choca con la Tierra cada 1 MA.

Metodologia

- Analisis de las caracterisitcas (parametros orbitales y fisicos) de la poblacion real (muchos ploteos).
- Elaboracion de modelo apropiado.
- Estudio analitico con manipuladores algebraicos (Mapple, Mathematica, otros).
([link](#))
- Implementacion de integrador apropiado.
- Integraciones numericas de poblaciones reales y ficticias (de minutos a meses integrando)
- Mineria de datos.
- Flujo en el espacio de parametros. ([link](#))
- Analisis de frecuencias fundamentales, tiempo-frecuencia, mapas de frecuencia, wavelets.
- Lyapunovs: medida de divergencia de orbitas.
- Proyectos observacionales: busqueda y seguimiento de objetos.

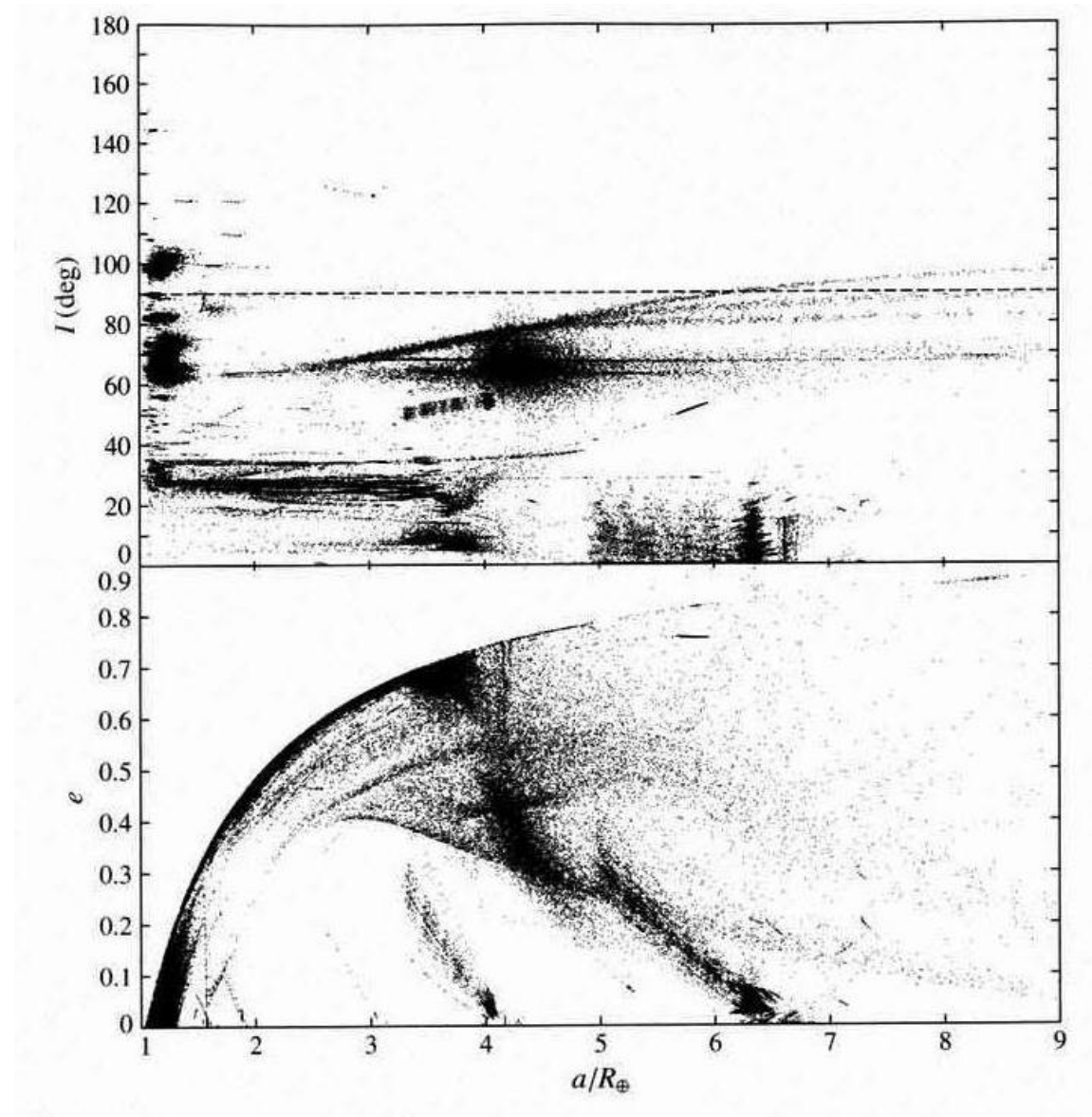
El Dpto. de Astronomia en Dinamica

- Origen y evolucion de cometas: Fernandez, Tancredi, Gallardo, A. Sosa, Mallada.
- Fuerzas no gravitacionales en cometas: Fernandez, Tancredi, Gallardo, Bolatto, Carballo, A. Sosa.
- Formacion del sistema planetario: Fernandez, Tancredi.
- Metodos numericos: Gallardo, Tancredi, Sanchez, Motta.
- Origen y evolucion de NEAs: Tancredi, Fernandez, Gallardo, Bruzzone.
- Observacion: OALM + A. Sosa, N. Sosa, Licandro, Artigue
- Sistemas Extrasolares: Sanchez, Fernandez, Rodriguez, Gallardo.
- Resonancias: Gallardo, Rodriguez.
- Region transneptuniana: Fernandez, Gallardo, Tancredi.
- Determinacion de orbitas: Tancredi.
- Meteoros: Tancredi.

- Rotacion de asteroides y cometas: Tancredi, Gallardo, Licandro, N. Sosa, Roland, Benitez, Salvo, Errico.
- Aspectos relativistas: ????

Temas en los que no hemos trabajado aun:

- Anillos
- Mareas
- Dinamica rotacional
- Fuerzas no gravitacionales en asteroides
- Asteroides binarios
- Dinamica Galactica
- Migracion por interaccion con disco
- Satelites naturales
- Satelites artificiales y chatarra espacial:



(Chatarra espacial, de Bertotti et al.)

¿Dónde se Publica?

- **Astronomy & Astrophysics**
- **Astronomical Journal**
- **Astrophysical Journal**
- **Earth, Moon and Planets**
- **Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy**
- **Planetary and Space Sciences (QEPD)**
- **Icarus**
- **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**
- **Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica**

Todas las referencias estan disponibles en NASA ADS.

Vinculos

- **Universidad de San Pablo**
- **Universidad de Uppsala**
- **Observatorio de Cordoba**
- **Universidad Nacional de La Plata**
- **Observatorio de Rio**
- **Instituto Astrofisico de Canarias**
- **Universidad de Helsinki**

Cursos Relacionados

- **Mecanica Analitica**
- **Mecanica Celeste**
- **Dinamica del Sistema Solar**
- **Origen del Sistema Solar**
- **Fisica no lineal**
- **opcional de Gravitacion**
- **Algun curso de la Licenciatura en Matematicas**

Bibliografía y Recursos

Libros:

- Roy, Danby, Gonzalez Martinez-Pais, Portilla.
- Solar System Dynamics, Murray & Dermott 1999
- Modern Celestial Mechanics, Morbidelli 2002 (felicitar al Correo...)

Internet:

- Lectures de Murray: www.maths.qmul.ac.uk/~carl/SolarSystem
- www.fisica.edu.uy/~gallardo: NEAPLOT, EVORB, cursos, libros
- www.alcyone.de: Planet's Orbits
- NASA ADS

Creditos

LaTeX: slides, foils, PDFLaTeX, MiKTeX, WinEdt

Adobe Acrobat 5.0

Fortran: g77, Force 2.0, DISLIN

GNUPLOT 3.7

Mathematica 5.0

FIN

Montevideo, octubre de 2004.