PRTCC: Aspectos Generales, Física Computacional 2010

Sebastián Bruzzone

16 de julio de 2010

Dos son compania, tres es multitud...

Introducción PRTCC

El Problema Restringido de Tres Cuerpos Circular, o *PRTCC* representa un caso especial del problema clásico de 3 masas interactuando en un campo gravitatorio. Es sin duda, uno de los ejemplos más usados en la literatura para la aplicación de métodos númericos. El problema de tres cuerpos clásico no es posible resolverlo analíticamente, siendo útil hacer restricciones en el modelo.

El *PRTC* representa el caso especial del movimiento de una partícula con masa despreciable bajo la acción gravitatoria de dos cuerpos masivos en órbita circular.

1. El Problema de Tres Cuerpos precisa de $6\times3=18$ integrales de movimiento para ser resuelto analítimente, al representarse en $6\times3=18$ ecuaciones de primer orden.
2. Se pueden encontrar 10 integrales de movimiento.
3. 6 Constantes para el Baricentro del Sistema.
4. 3 Constantes para el vector $\overrightarrow{h}$, momento angular del sistema.
5. 1 Constante que es la energía de este sistema.

Introducción, El Sistema

Se busca simular el movimiento de un masa despreciable m_3 en este régimen, bajo la acción de dos cuerpos masivos m_1 y m_2. El problema se plantea en coordenadas adimensionadas de masa y posición por simplicidad. Se tomará un sistema de referencia *no incercial*, solidario al sistema rotante de las masas m_1 y m_2 de trayectorial circular. Se definen las unidades, tu, μ y du de manera que:

$$
\begin{aligned}
m_1 &+ m_2 = 1 \text{ con } m_3 = 0 && (1) \\
\mu &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} && (2) \\
tu &= 1rad/\omega \text{ con } 2\pi \text{ como frecuencia.} && (3) \\
m_2 &= \mu && (4) \\
m_1 &= 1 - \mu && (5) \\
\mathcal{G} &= 1 && (6)
\end{aligned}
$$

Representemos el sistema.

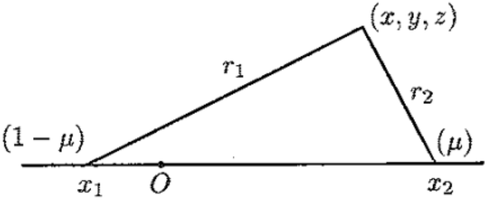

Figura: Partícula sin masa m_3 con coord. (x,y,z). Cuerpos masivos m_1 y m_2 ubicados en $(\mu,0,0)$ y $(1-\mu,0,0)$ resp. Los cuerpos poseen además masas $1-\mu$ y μ.

Ecuaciones de Movimiento en el sistema rotante.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v \\
\dot{z} &= w \\
\dot{u} &= x + 2v - (1-\mu)\frac{x+\mu}{((x+\mu)^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \mu\frac{x-(1-\mu)}{((x-(1-\mu)^2+y^2+z^2))^{3/2}} \\
\dot{v} &= y - 2u - (1-\mu)\frac{y}{((x+\mu)^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \mu\frac{y}{((x-(1-\mu)^2+y^2+z^2))^{3/2}} \\
\dot{w} &= -(1-\mu)\frac{z}{((x+\mu)^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \mu\frac{z}{((x-(1-\mu))^2+y^2+z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Constante de Jacobi

La energía de la partícula ni su momento angular son conservados en el movimiento, pero si se conserva una cantidad, llamada *Constante de Jacobi* expresada en el sistema rotante como

$$C = x^2 + y^2 + 2\frac{(1-\mu)}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{7}$$

$$\text{siendo } r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{y } r_2 = \sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2}$$

Primeros resultados para una partícula sin masa en el sistema Sol-Júpiter, $\mu = 0{,}001$ en las proximidades de puntos Lagrangianos.

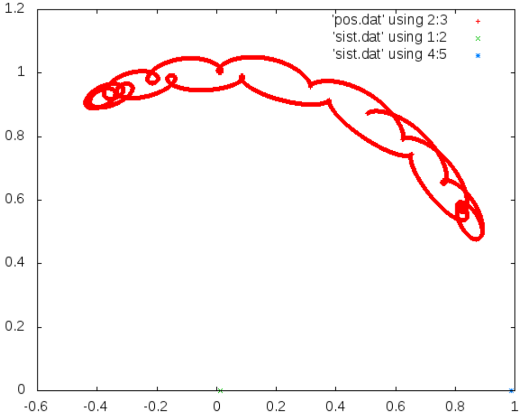

Figura: Partícula con $x_0 = 1/2 - \mu + 0{,}0065$ e $y_0 = \sqrt{3}/2 + 0{,}0065$

Integrando

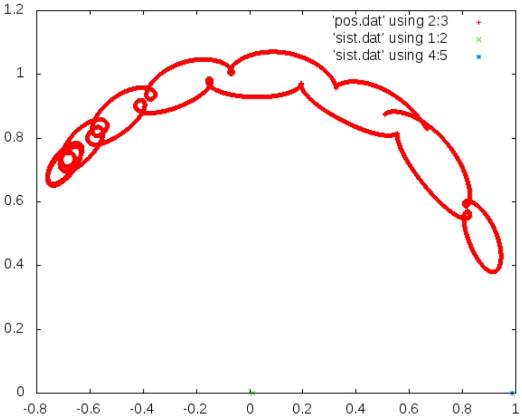

Figura: Partícula con $x_0 = 1/2 - \mu + 0{,}008$ e $y_0 = \sqrt{3}/2 + 0{,}008$

Integrando condiciones iniciales $(x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, 0)$ para $C = 3{,}07$

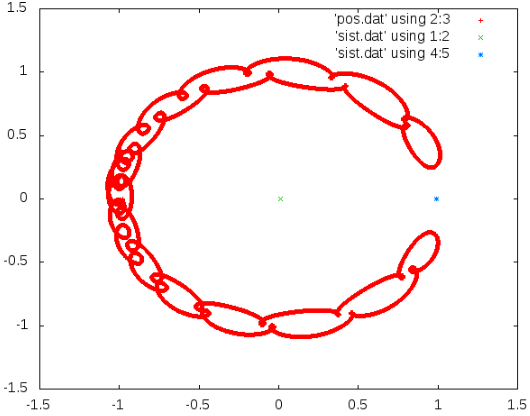

Figura: Partícula con condiciones $x_0 = -0{,}97668$ e $\dot{y}_0 = -0{,}06118$

Integrando, Orbitas de Cerradura

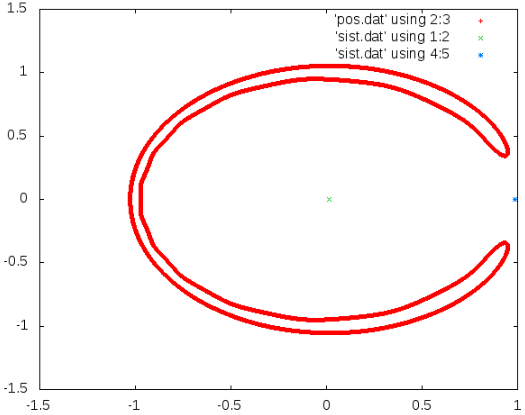

Figura: Partícula con $x_0 = -1{,}02745$ e $\dot{y}_0 = 0{,}04032$

Secciones de Poincaré

Buscamos poder encontrar posibles zonas de comportamiento caótico, o no regular, para familias de condiciones iniciales en determinadas "energias" o constantes de Jacobi. Se integran sucesivas orbitas para diferentes condiciones iniciales cumpliendo una constante de Jacobi fija como C=3.07 y buscamos las intersecciones de éstas con el plano $(x, \dot{x})$ para $\dot{y} > 0$ cada vez que $y = 0$. Dado que y no se aproxima a 0 significativamente, se buscan los cambios de signo en y para pasos sucesivos manteniendo la restricción $\dot{y} > 0$.

Secciones de Poincaré en $C = 3{,}07$

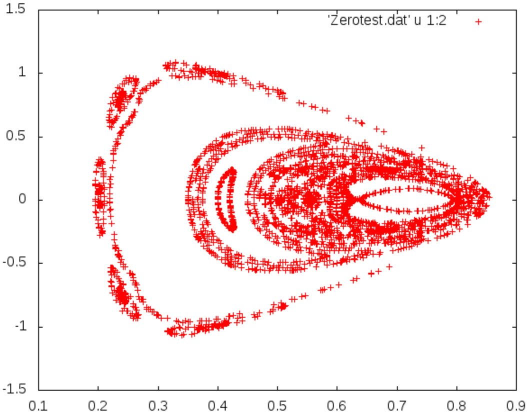

Figura: Sección de Poincaré para condiciones iniciales $y = \dot{x} = 0$, con $\dot{y} > 0$ y x e $\dot{y}$ cumpliendo $C_{3{,}07}$

Secciones de Poincaré en $c = 3{,}13$

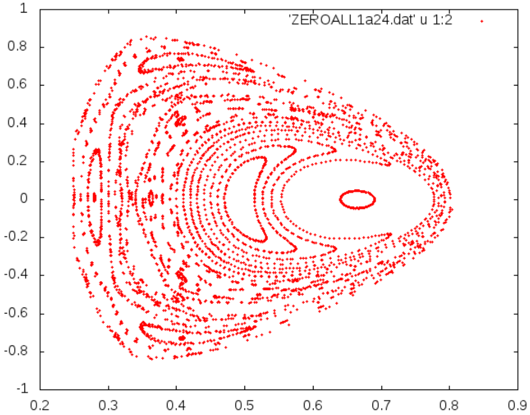

Figura: Seccion de Poincaré para $C = 3{,}13$

Podemos pasar a considerar los elementos orbitales de la partícula pasa así, verificar las zonas propensas a resonancias de movimientos de medios. Con las siguientes relaciones obtenemos a y e

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{2}{r_1} - \frac{V^2}{(1-\mu)}\right)^{-1} \\ e &= \sqrt{1 - \frac{h^2}{(1-\mu)a}} \end{aligned}$$

Siendo $V^2 = \dot{x}^2 + (\dot{y}^2 + x + \mu)^2$ y $h = (x+\mu)(\dot{y} + x + \mu)$.