Introduccion al Metodo de Frobenius y el Problema de Sturm-Loiuville

Sebastian Bruzzone

Abril 2006

Índice general

Resumen

El fin de este trabajo es presentarle al estudiante un metodo muy util para la resolucion de ecuaciones diferenciales de segundo orden conocido como el **Metodo de Frobenius**[1]. Este metodo se convirtio en una herramienta muy poderosa para la determinacion de soluciones para un amplio espectro de ecuaciones diferenciales de segundo orden con una inmediata repercusion en aplicaciones de la fisica en innumerables problemas.
El metodo propone la busqueda de soluciones desarrollables en series de potencias para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Este procedimiento requiere el encontrar relaciones de recurrencia entre los coeficientes de las series buscadas, asumiendo un primer termino no nulo.
Las ideas mas generales sobre desarrollos en series de potencias se presentan en la primea seccion, *Soluciones Analticas.*. En la siguiente seccion se continua con la definicion de puntos singulares para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden para asi presentar a continuacion el tema principal en la seccion *El Metodo de Frobenius.*
Un breve resumen es presentado y luego algunas ecuaciones de mucha importancia son presentadas como casos particulares de las ecuaciones analizadas bajo el metodo antes presentado en la seccion *Una Clase Particular de Ecuaciones.*

[1] *Nacimiento de Frobenius*

0.1. Soluciones Analiticas (Series de Potencias)

Una clase muy extensa de ecuaciones diferenciales poseen soluciones expresables en series de potencias, las cuales son validas en un dominio determinado. Las funciones que gozan de esta particularidad son denominadas *analiticas* Las ecuaciones diferenciales mas familiares para todos como la ecuacion de un oscilador armonico $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ admite soluciones del tipo $x(s) = A_1 sen(\omega s) + A_2 cos(\omega s)$ siendo claro $sen(\omega s)$ y $cos(\omega s)$ funciones analiticas. De igual manera para la ecuacion de un oscilador amortiguado como en un gran numero de ecuaciones de la mecanica nos encontraremos con este tipo de ecuaciones.
Una expresion de la forma

$$A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

se denomina **serie de potencias**, estando definida por el limite

$$lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} A_n (x - x_0)^n$$

para aquellos valores de x en que exista este limite, en cuyo caso la serie se denominara convergente. Para determinar los x que cumplen con esta condicion se utiliza el criterio del cociente,

$$\text{si} \;\; lim_{n \to \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \rho \qquad \text{Converge si } \rho < 1 \qquad \text{Diverge si } \rho > 1$$

notar que el criterio no clasifica si $\rho = 1$.
Mas general es considerar el valor absoluto de dicho cociente, si esta acotado por cierto numero σ cuando $n \to \infty$, la serie converge cuando $\sigma < 1$. Por lo tanto tendriamos

$$\rho = lim_{n \to \infty} |\frac{A_{n+1}}{A_n}||x - x_0| = L|x - x_0| \;\; \text{en donde } L = lim_{n \to \infty} |\frac{A_{n+1}}{A_n}|$$

Si este limite existe, se deduce que (1)

$$\text{converge si } |x - x_0| < \frac{1}{L} \;\; \text{diverge si } |x - x_0| > \frac{1}{L} \tag{2}$$

De esta manera tenemos un intervalo de convergencia cuando L existe

$$(x_0 - \frac{1}{L}, x_0 + \frac{1}{L})$$

Este intervalo es simetrico respecto de x_0 de manera tal que la serie es convergente dentro de este intervalo y divergente fuera del mismo.
Que sucede si deseamos evaluar el comportamiento de una serie en los extremos del intervalo de convergencia? Es decir en los $x \in$ R tales que$x = x_0 \pm \frac{1}{L}$
Podemos abordar esta pregunta diferenciando dos criterios.

- Si en un extremo del intervalo de convergencia se tiene que los terminos de la serie no son de signo constante, al menos desde un valor de n en adelante, la serie converge si desde ese valor se n u otro valor mayor los terminos decrecen monotamente en valor absoluto y tienden a cero. En caso contrario la serie sera divergente.

- Si los terminos resultan de signo constante desde un valor de n en adelante y si el cociente del termino $n+1$ al termino $n-$simo puede escribirse como

  $$1-\frac{k_1}{n}-\frac{k_2}{n^2}+\dots \qquad \text{la serie converge si } k_1>1 \qquad \text{y diverge si } k_1\leq 1$$

  Este ultimo es conocido como el criterio de Raabe.

Cabe observar que si $L=0$ la serie converge en cualquier intervalo de x. Por el contrario si L es infinito, o con mayor generalidad si $|\frac{A_{n+1}}{A_n}|$ no esta acotado cuando $n\to\infty$, la serie convergera solo en $x=x_0$. Cuando $|\frac{A_{n+1}}{A_n}|$ esta acotado, queda determinado un intervalo de convergencia finito en donde la cantidad $\frac{1}{L}$ se denomina **radio de convergencia**.
Puede ocurri que una serie tenga terminos cuyos subindices sean multiplosde un entero $N\geq 1$, es decir que posea la siguiente forma,

$$A_0+A_N(x-x_0)^N+A_{2N}(x-x_0)^{2N}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}A_{kN}(x-x_0)^{kN}$$

Consideremos como ejemplo la serie de $cosx$

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots=\sum_{k=1}^{\infty}(-)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad |x|\leq\infty$$

que no es otra cosa la serie de Maclaurin de $cosx$.
En tal caso tenemos

$$\rho_N=lim_{k\to\infty}|\frac{A_{(k+1)N}}{A_{kN}}||x-x_0|^N=L_N|x-x_0|^N \qquad \text{siendo } L_N=\lim_{k\to\infty}|\frac{A_{(k+1)N}}{A_{kN}}|$$

y se tiene que la serie converge para $L_N|x-x_0|^N<1$ o bien para los x tales que $|x-x_0|<\frac{1}{\sqrt[N]{L_N}}$.
Una propiedad importante de las series de potencias es la posibilidad de operar sobre ellas de la misma forma que se opera con los polinomios.
Dentro del intervalo de convergencia, una serie de potencias representa una funcion continua de x, que posse derivadas de todos los ordenes y se puede derivar e integrar termino a termino como se hace con los polinomios; las series resultantes convergen, en el mismo intervalo, hacia la derivada o integral de la funcion representada por la serie incial. Una propiedad importante de la convergencia absoluta de series, que no permite permutar el signo del limite con los operadores de integracion y derivacion.
Supongamos ahora la serie,

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n$$

que converge en un intervalo no nulo de $x=x_0$ y representa, por cosiguiente, a una funcion $f(x)$ en este intervalo.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n \tag{3}$$

Derivando k veces los dos terminos en la ecuacion anterior y evaluando en $x = x_0$ se tiene

$$f^k(x_0) = k'.A_k \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \tag{4}$$

por lo tanto (3) se transforma en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}(x_0)(x - x_0)^n \tag{5}$$

que termina siendo el desarrollo de Taylor en serie de potencias de $f(x)$ en $x = x_0$. Es claro que no todas las funciones aceptan tal desarrollo debido a que deben existir todas sus derivadas en $x = x_0$.
La funciones que aceptan este desarrollo se denominan **regulares** en $x = x_0$. Si $f(x)$ y todas sus derivadas con continuas (si $f \in \mathcal{C}^{\infty}(I)$) en un intervalo I que incluya al punto $x = x_0$, $f(x)$ se podra expresar como suma de terminos de potencias de $(x - x_0)$ mas un termino complementario, en la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_N(x)$$

$$\text{siendo } R_N(x) = \frac{f^N(\chi)}{N!}(x - x_0)^N \quad \chi \in (x, x_0)$$

0.1.1. Buscando soluciones regulares (Un ejemplo)

Consideremos la siguiente ecuacion

$$Ly \equiv x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 + x)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

busquemos una solucion de la forma[1]

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

tomemos las derivadas primera y segunda de esta

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} kA_k x^{k-1} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2}$$

sustituyamos esto ahora en la ecuacion diferencial

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)A_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} kA_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} kA_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} A - kx^k$$

Combinando la primera, tercera y cuarta sumatorias tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}[k(k-1) + k - 1]A_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2 - 1)A_k x^k \text{ resultando en}$$

[1]Estudiaremos si verifica soluciones analiticas desarrollables en un entorno de $x_0 = 0$

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty}(k^2-1)A_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} kA_k x^{k+1}$$

Ahora para combinar estas sumas cambiamos $k \to n$ en la primera y $k+1 \to n$ en la seguna

$$Ly \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-1)A_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)A_n x^n =$$

$$= -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)A_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)A_n x^n$$

$$\Rightarrow Ly = -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n^2-1)A_n + (n-1)A_{n-1}]x^n$$

Ahora bien, para anular Ly, cada termino con x^n debe anularse asi como tambien el termino independiente, por lo tanto $A_0 = 0$ y ademas se tiene una formula de recurrencia,

$$(n-1)[(n+1)A_n + A_{n-1}] = 0 \qquad n = 1, 2, 3...$$

la cual se satisface para $n = 1$. Para $n \geq 2$ se tiene $-\frac{A_{n-1}}{A_n}$ $n = 2, 3, 4...$
Por consiguiente tenemos,

$$A_2 = -\frac{A_1}{3}, \qquad A_3 = -\frac{A_2}{4}, \qquad A_4 = -\frac{A_3}{5}, \qquad \ldots$$

Tenemos entonces que $A_0 = 0$, A_1 es arbitrario y los demas coeficientes quedan determinados mediante A_1. La solucion es pues,

$$y = A_1\left(x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} - \ldots\right)$$

que puede escribirse de la forma

$$y = \frac{2A_1}{x}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) = 2\frac{A_1}{x}\left(x - 1 + (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots)\right)$$

tenemos entoces la siguiente expresion

$$y = 2A_1\left(\frac{e^{-x} - 1 + x}{x}\right)$$

Por lo tanto hemos encontrado una unica solucion analitica a la ecuacion diferencial, es decir expresable en series de potencias de x alrededor de $x_0 = 0$. Esto no lleva a creer que no todas las soluciones linealmente independientes pueden expresarse en series de potencias, o sea en expresiones regulares en $x_0 = 0$.

0.1.2. Buscando soluciones regulares (Segundo ejemplo)

Consideremos la siguiente ecuacion

$$Ly \equiv x^3\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Como visto anteriormente, asumimos que se tiene una solucion de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$, en donde luego de sustituir se tiene:

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k == A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n + (n-1)(n-2)A_{n-1}]x^n$$

que con la condicion $Ly = 0$ implica $A_0 = 0$ y ademas

$$A_n = -(n-1)(n-2)A_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3. \dots) \tag{6}$$

por lo tanto $A_1 = A_2 = 0$, entonces tenemos $y = 0$, es decir que la ecuacion no admite soluciones expresables en series de potencias de x, o sea regulares en $x_0 = 0$ aparte de la solucion trivial nula.

0.2. Puntos Singulares para Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Escribamos una ecuacion diferencial lineal homogenea de segundo orden en la forma tipica,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = Ly \tag{7}$$

de esto resulta claro que el comportamiento de sus soluciones en un entorno de $x = x_0$ dependera exclusivamente del de las funciones $a_1(x)$ y $a_2(x)$ en dicho entorno.
Diremos que el punto $x = x_0$ **es un punto ordinario** de la ecuacion diferencial si las funciones $\mathbf{a_1(x)}$ y $\mathbf{a_2(x)}$ son regulares en el, o sea si $a_1(x)$ y $a_2(x)$ admiten desarrollos en series de potencias validos **dentro de algun intervalo que contenga a** $x = x_0$.
En caso contrario, diremos que el **punto es singular** y en ese caso, si los productos $(x - x_0)a_1(x)$ y $(x - x_0)^2 a_2(x)$ son regulares en $x = x_0$ aadiremos que se trata de un punto singular regular, en cualquier otro caso simplemente diremos que $x = x_0$ es **un punto singular irregular**.
En la ecuacion

$$Ly \equiv \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

tenemos $a_1(x) = 0$ y $a_2(x) = -1$, asi que todos los puntos son ordinarios. En el caso

$$Ly \equiv x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 + x)\frac{dy}{dx} - y = \frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = 0 \tag{8}$$

Tenemos entonces $a_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$ y $a_2(x) = -\frac{1}{x^2}$ por lo tanto vemos que ambas funciones no admiten desarrollos en series de potencias de x, pero si admiten desarrollos en $(x - x_0)$ para $x \neq x_0$. Asi que $x = 0$ es el unico punto singular.
Dado que los productos $xa_1(x) = 1 + x$ y $x^2 a_2(x) = -1$ son regulares, se deduce que el punto $x = 0$ es un punto singular regular.
Como ultimo ejemplo podemos considerar

$$Ly \equiv x^3\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x^3}y = 0 \tag{9}$$

en donde es claro que el punto $x = 0$ es singular irregular.

0.3. El Metodo de Frobenius

Nuestra motivacion es poder determinar en cuales casos puedo encontrar soluciones regulares en $x = 0$ para una ecuacion diferencial lineal homogenea de segundo orden. Basta realizar un cambio de variable como $z = x - x_0$ para determinar las soluciones de la ecuacion diferencial nueva en $z = 0$ (o sea en $x = x_0$) Reescribiendo la ecuacion [0] de la forma

$$Ly \equiv R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}P(x)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}Q(x)y = 0 \tag{10}$$

en donde $R(x)$ no se anula en un intervalo que contiene a $x = 0$. Suponemos ademas que $P(x), Q(x)$ y $R(x)$ son funciones regulares en $x = 0$.
Tenemos entonces que

$$xa_1(x) = \frac{P(x)}{R(x)} \qquad x^2a_2(x) = \frac{Q(x)}{R(x)} \tag{11}$$

son regulares en $x = 0$. Ademas de lo anterior se asume que la ecuacion [1] fue dividida previamente por cierta constante de manera tal que $R(0) = 1$.
Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} P(x) &= P_0 + P_1x + P_2x^2 + \dots & (12)\\ Q(x) &= Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + \dots & (13)\\ R(x) &= 1 + R_1x + R_2x^2 + \dots & (14) \end{aligned}$$

Intentamos encontrar soluciones analiticas, es decir, desarrollables en series de potencias de la variable x del tipo

$$y = x^s\sum_{n=0}^{\infty} A_nx^n = A_0x^s + A_1x^{s+1} + A_2x^{s+2} + \dots \tag{15}$$

en donde de busca determinar el valor de s en donde supondremos que $A_0 \neq 0$.
Sustituyendo en [1] operando se llega a la siguiente relacion:

$$\begin{aligned} Ly \equiv [s(s-1) + P_0s + Q_0]A_0x^{s-2} + \{[(s+1)s + P_0(s+1) + Q_0]A_1 +\\ R_1s(s-1) + P_1s + Q_1A_0\}x^{s-1} +\\ \{[(s+2)(s+1) + P_0(s+2) + Q_0]A_2 +\\ (R_1(s+1)s + P_1(s+1) + Q_1)A_1+\\ +(R_2s(s-1) + P_2s + Q_2)A_0\}x^s \end{aligned} \tag{16}$$

Definiendo ahora dos funciones $f(s)$ y $g_k(s)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(s) &= s(s-1) + P_0s + Q_0 = s^2 + (P_0-1)s + Q_0 & (17)\\ g_k(s) &= R_k(s-k)(s-k-1) + P_k(s-k) + Q_k = & (18)\\ &= R_k(s-k)^2 + (P_k - R_k)(s-k) + Q_k & (19) \end{aligned}$$

Con la notacion de (8),(9), tenemos que (7) puede ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
Ly \equiv f(s)A_0x^{s-2} &+ [f(s+1)A_1 + g_1(s+1)A_0]x^{s-1} + \\
&+[f(s+2)A_2 + g_1(s+2)A_1 + g_2(s+2)A_0]x^s + \\
&+[f(s+n)A_n + \sum_{k=1}^{n} g_k(s+n)A_{n-k}]x^{s+n-2} + \dots
\end{aligned} \tag{20}
$$

Para que (1) se satisfaga en algun intervalo de $x = 0$, esta ultima expresion debera anularse identicamente

$$\Rightarrow f(s) = 0 \quad \text{o bien} \quad s^2 + (P_0 - 1)s + Q_0 = 0 \tag{21}$$

Esta ecuacion determina dos valores para s, la llamaremos ecuacion *indicial*, debido a que indica dos valores posibles para el indice s. Es aqui donde obtendremos los exponentes de primer termino en las dos series del tipo (6), son los exponentes de la ecuacion diferencial en $x = 0$.
Ahora anulando el coefciente de x^{s-1} en (11) uno encuentra

$$f(s+1)A_1 = -g_1(s+1)A_0$$

mientras que para el coeficiente de x^s se tiene

$$f(s+2)A_2 = -g_1(s+2)A_1 - g_2(s+2)A_0$$

En general la anulacion del coeficiente de x^{s+n-2} en (11) nos proporciona la siguiente formula de recurrencia

$$f(s+n)A_n = -\sum_{k=1}^{n} g_k(s+k)A_{n-k} \qquad (n \geq 1) \tag{22}$$

la cual determina A_n en funcion de los precedentes, por lo tanto determina A_n en funcion de A_0, el cual asumimos $\neq 0$, si $\forall n$ tenemos $f(s+n) \neq 0$. Sean ahora s_1 y s_2 las raices de [12]. Evaluaremos los casos segun la naturaleza de estas raices, si son iguales, distintas, reales, etc.

- si $s_1 = s_2$ o bien
$$(1 - P_0)^2 - 4Q_0 = 0 \tag{23}$$
solo tendremos una solucion del tipo (3)

- si $s_1 \neq s_2$
$$
\begin{aligned}
f(s) = (s - s_1)(s - s_2) \Rightarrow f(s+n) &= (s + n - s_1)(s + n - s_2) \\
&\Rightarrow f(s_1 + n) = n[n(s_1 - s_2] \\
&\Rightarrow f(s_2 + n) = n[n - (s_1 - s_2)]
\end{aligned} \tag{24}
$$

- Si s_1 es complejo y P_n, Q_n y R_n son todos reales, tendremos que $s_2 = \overline{s_1} \Rightarrow s_1 - s_2$ sera imaginario puro entonces las expresiones anteriores (15) no se anulan para ningun valor real de n, excepto para $n = 0$.

- Si s_1 y s_2 son reales y distintos con $s_1 - s_2 > 0$ entonces $f(s+n)$ no se anula para $n \geq 1$ y ademas $f(s_2+n)$ solo se anulara para $n = s_1 - s_2$. Dado que $n \in \mathbf{N}$, esto ultimo es posible si $s_1 - s_2$ es natural.
- Por ultimo, si $s_1 = s_2$, $f(s_1+n) = n^2$ entonces $f(s_1+n)$ no se anula para $n \geq 1$

Tenemos entonces para $s_1 - s_2 = N$, con $N \in \mathbf{N}$ la formula de recurrencia (13) se verifica para $n = N$

$$(s - s_2)(s - s_2 + N)A_N = -\sum_{k=1}^{N} g_k(s+N)A_{N-k} \tag{25}$$

donde con $s = s_2$, se anula el primer termino y la ecuacion no se verifica para ningun A_N, a menos que el segundo miembro tambien se anule, en tal caso A_N y A_0 quedan indeterminados.

0.4. Analisis de los Casos Excepcionales

0.4.1. Exponentes iguales, $s_1 = s_2$

Intentemos determinar una segunda solucion que sea independiente de la obtenida por el metodo de Frobenius.
En vez de introducir primero el valor del exponente s_1 en la formula de recurrencia (13) y determinar $A_1, A_2, \ldots, A_N$ a partir de A_0, supondremos que estos coeficientes estan expresados por medio de la formula de recurrencia en funcion de A_0 y de s, indicando esto como $A_1 = A_1(s), A_2 = A_2(s), \ldots$. Con estos valores de los A_k se determina una funcion y, que depende de s y de x; indicandola como $y_s(x)$:

$$y_s(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^n \tag{26}$$

Si tenemos en cuenta (13):

$$\begin{aligned} Ly \equiv\ & f(s)A_0x^{s-2} + [f(s+1)A_1 + g_1(s+1)A_0]x^{s-1} + \\ & +[f(s+2)A_2 + g_1(s+2)A_1 + g_2(s+2)A_0]x^s + \\ & +[f(s+n)A_n + \sum_{k=1}^{n} g_k(s+n)A_{n-k}]x^{s+n-2} + \ldots \end{aligned}$$

La formula de recurrencia para $n \geq 1$ exige que todos los terminos se anulen en (13) salvo el primero

$$Ly_s(x) = A_0 f(s)x^{s-2} \qquad \text{como} \qquad s_1 = s_2$$

$$\Rightarrow Ly_s(x) = A_0(s - s_1)^2 x^{s-2} \tag{27}$$

Con $s_1 = s_2$ concuerda de que (17) sea solucion de (1), o sea de la ecuacion diferencial lineal homogenea de segundo orden Denominemos a esta solucion como $y_1(x)$ para $s = s_1$.

Como s_1 es raiz doble entonces el resultado de derivar respecto de s tambien se anulara en $s = s_1$.

$$\frac{\partial}{\partial s} Ly_s(x) = A_0[2(s-s_1) + (s-s_1)^2 lnx]x^{s-2}$$

como el operador $\partial/\partial s$ y el operador L conmutan se tiene:

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial s} Ly_s(x)\right)_{s=s_1} = L\left(\frac{\partial}{\partial s} y_s(x)\right)_{s=s_1} = 0 \tag{28}$$

la segunda solucion de (1) para $s_1 = s_2$ es entonces de la forma

$$y_2(x) = \left(\frac{\partial}{\partial s} y_s(x)\right)_{s=s_1} \tag{29}$$

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s_1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s_1)x^{n+s_1} \tag{30}$$

En donde la segunda ecuacion, (21), representa a la primera solucion hallada mediante el metodo de Frobenius. Ahora una solucion independiente esta dada como vimos por

$$y_2(x)\left(\frac{\partial}{\partial s} y_s\right)_{s=s_1} = \left(x^s lnx \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^s + x^s \sum_{n=0}^{\infty} A'_n(s)x^n\right)_{s=s_1} \tag{31}$$

Utilizando (21) y viendo que A_0 es independiente de s tenemos

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n(s_1)x^{n+s_1} \quad \text{siendo} \quad A'_n(s_1) = \left(\frac{d}{ds} A_n(s)\right)_{s=s_1} \tag{32}$$

Hemos encotrado una segunda solucion independiente a la ecuacion diferencial.

0.4.2. Exponentes que difieren en un natural

Es en este caso que tenemos

$$s_1 - s_2 = N \geq 1$$

Es bueno recordar que la formula de recurrencia (22) no se satisface identicamente para $n = N$ y $s = s_2$.
De nuevo supondremos que (16) vale para $n \geq 1$ para todos los valores de s, asi con las A_k en funcion de A_0 y s. Definimos tambien $y = y_s(x)$ del tipo (17).
Es claro que segun (16) y (22) las expresiones de los coeficientes $A_N(s)$,$A_{N+1}(s)$ tendran en el denominador el factor $(s - s_2)$ y no tendran por lo tanto un limite finito en $s \to s_2$. Si consideramos en vez el producto $(s - s_2)y_s(x)$, se ve que cuando $s \to s_2$ los terminos con coeficientes A_n con $n < N$ se anulan y los demas terminos tendran limites finitos lo que genera una **nueva serie de potencias** en x con un termino inicial en $x^{s_2+N} = x^{s_1}$. Veamos las cuentas, teniamos:

$$f(s+n)A_n = -\sum_{k=1}^{n} g_k(s+n)A_{n-k}$$

entonces evaluando en $n = N$ y recordando que $f(s) = (s - s_1)(s - s_2)$

$$A_N = -\sum_{k=1}^{N} g_k(s+N)\frac{A_{N-k}}{(s-s_2)}\frac{1}{(s-s_2+N)}$$

ahora con

$$f(s+N+1)A_{N+1} = -\sum_{k}^{N+1} g_k(s+N+1)A_{N+1-k} = -g_1(s+N+1)A_N - g_2(s+N+1)A_{N-1} - \ldots$$

Entonces

$$A_{N+1} = -g_1(s+N+1)\frac{A_N}{f(s+N+1)} - g_2(s+N+1)\frac{A_{N-1}}{f(s+N+1)} - \ldots$$

Quedando

$$A_{N+1} = -g_1(s+N+1)\left(-\sum_{k=1}^{N} g_k(s+N)\frac{A_{n-k}}{(s-s_2)(s-s_2+N)f(s+N+1)}\right)$$

Como ultimo tenemos

$$(s-s_2)A_{N+1} = \left(\frac{g_1(s+N+1)}{f(s+N+1)}\sum_{k=1}^{N} g_k(s+N)\frac{A_{N-k}}{(s-s_2)(s-s_2+N)}\right)$$

Por lo tanto los A_n seran no nulos para $n \geq N$ entonces cuando $s \to s_2$ se tendra una serie nueva con el primer termino en $x^{s_2+N} = x^{s_1}$.
La formula de recurrencia (22) anula todos lo terminos salvo al primero en (20) por lo tanto:

$$L(s-s_2)y_s(x) = A_0(s-s_2)^2(s-s_1)x^{s-2} \tag{33}$$

y siguiendo un razonamiento analogo al que nos conducia a (28) se tiene

$$L\{\frac{\partial}{\partial s}[(s-s_2)y_s(x)]\}_{s=s_2} = 0 \tag{34}$$

asi que tenemos la segunda raiz a la ecuacion diferencial y_2 como

$$y_2(x) = \{\frac{\partial}{\partial s}[(s-s_2)y_s(x)]\}_{s=s_2} \tag{35}$$

junto con $y_1(x) = [y_s(x)]_{s=s_1}$ forman el conjunto de soluciones a la ecuacion diferencial. Pero debemos encontrar una expresion para esta nueva solucion.
Reescribiendo el tipo de solucion analitica que buscabamos vemos:

$$y_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^{n+s} = \sum_{n=0}^{N-1} A_n(s)x^{n+s} + \sum_{k=N}^{\infty}\frac{a_n(s)}{s-s_2}x^{n+s} \tag{36}$$

en donde $a_n(s) = (s-s_2)A_n(s)$ para $n \geq N$ Observando que $A_n(s)$ es regular en $s = s_2$ si $n < N$ y $a_n(s)$ es regular tambien en $s = s_2$ cuando $n \geq N$ se deduce

$$\frac{\partial}{\partial s}[(s-s_2)y_s(x)] = (s-s_2)\sum_{n=0}^{N-1}\left(A'_n(s) + A_n(s)lnx\right)x^{n+s} + \sum_{n=0}^{N-1} A_N(s)x^{n+s}$$

$$+\sum_{n=N}^{\infty} a'_n(s)x^{n+s} + lnx\sum_{n=N}^{\infty} a_n(s)x^{n+s} \tag{37}$$

con $s \to s_2$ se tiene la solucion $y_2(x)$ de la forma

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n(s_2)x^{n+s_2} + \sum_{n=N}^{\infty} a'_n(s_2)x^{n+s_2} + lnx\sum_{n=N}^{\infty} a_n(s_2)x^{n+s_2} \tag{38}$$

con $a_n(s) = (s - s_2)A_n(s)$ para $n \geq N$

Ahora escribamos la solucion correspondiente a s_1 en la siguiente forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s_1)x^{n+s_2} \equiv A_0 u_1(x) \tag{39}$$

Observando que el coeficiene de lnx en (38) es equivalente a considerar el siguiente limite

$$lim_{s\to s_2}[(s - s_2\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^{n+s}]$$

se tiene entonces, en virtud de (33) que este termino es tambien solucion de la ecuacion diferencial. Dado que su primer termino es del tipo $x^{N+s_2} = x^{s_1}$[1], esta debe ser un multiplo fijo de la solucion $y_1(x)$, ver (39). Por lo tanto los coeficientes de ambas estan a razon constante. Esta razon se encuentra haciendo el cociente de los primeros terminos, $a_N(s_2)/A_0$, asi de esta forma el coeficiente de lnx en (38) se puede reemplazar por

$$a_N(s_2)u_1(x)$$

por lo tanto () se convierte en la siguiente expresion

$$y_2(x) = a_N(s_2)u_1(x)lnx + \sum_{n=0}^{N-1} A_n(s_2)x^{n+s_2} + \sum_{n=N}^{\infty} a'_n(s_2)x^{n+s_2} \tag{40}$$

Cuando el segundo miembro de (25) contiene el factor $s - s_2$, hemos visto que resulta una solucion del tipo (15), correspondiente a $s = s_2$, en donde A_0 y A_N son arbritrarios. (40) cumple esto ya que si los A_N son regulares para $n \geq N$ se tiene

$$a_N(s_2) = lim_{s\to s_2}(s - s_2)A_N(s) = 0$$

y tambien

$$a'_n(s_2) = lim_{s\to s_2}\{\frac{d}{ds}[(s - s_2)A_n(s)]\} =$$
$$= lim_{s\to s_2}[(s - s_2)A'_n(s) + A_n(s)] = A_n(s_2)$$

por lo tanto el primer termino de (40) se anula y se los restantes se combinan para dar

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_N(s_2)x^{n+s_2}$$

[1]Recordar que los primeros $N - 1$ de la suma son nulos

0.5. A Modo de Resumen

En todos los casos en donde una ecuacion diferencial lineal homogenea con un punto singular regular en $x = 0$, con una unica solucion en funcion del exponente s_1 de la forma

$$y_1(x) = \sum_0^{\infty} A_n x^{n+s_1} \equiv A_0 u_1(x)$$

se tiene que cualquier otra solucion independiente sera del tipo

$$y_2(x) = Cu_1(x) lnx + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+s_2}$$

donde C es una constante.

0.5.1. Ejemplo 1

Siempre un ejemplo es bienvenido para aclarar un poco las cosas. Para aclarar el procedimiento anterior, consideremos la ecuacion diferencial

$$Ly \equiv x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Suponiendo una solucion de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+s}$$

resulta que

$$Ly = s(s-1)A_0 x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+s)(n+s-1)A_n + A_{n-1}] x^{n+s-1}$$

Obteniendose asi la formula de recurrencia

$$(n+s)(n+s-1)A_n = -A_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

o bien

$$A_n = -\frac{A_{n-1}}{(n+s)(n+s-1)}$$

siendo los dos exponentes

$$s_1 = 1 \qquad s_2 = 0$$

Ahora bien, dado que estos exponentes difieren en una unidad, la solucion deseada quedara asegurada por el mayor exponente, o sea $s_1 = 1$.
Con $s = s_1 = 1$, la formula de recurrencia se convierte en

$$(n+1)nA_n = -A_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

de la cual se deduce

$$A_1 = -\frac{A_0}{2 \cdot 1}, \qquad A_2 = -\frac{A_0}{(3 \cdot 2)(2 \cdot 1)} \qquad A_3 = -\frac{A_0}{(4 \cdot 3 \cdot 2)(3 \cdot 2 \cdot 1)}; \qquad \ldots$$

siendo en general

$$A_n = (-)^n \frac{A_0}{(n+1)!n!}$$

Por lo tanto la solucion correspondiente al exponente s_1 es entonces,

$$y_1 = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!n!} \equiv A_0 u_1(x)$$

Con $s = s_2 = 0$, la formula de recurrencia toma la siguiente forma

$$n(n-1)A_n = -A_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

Si $n = 1$, esta relacion es incomplatible con nuestra suposicion de $A_0 \neq 0$ y, por consiguiente, no existe la serie del tipo buscado para el exponente menor $s = 0$, en decir, que no hay serie que comienze por un termino constante. No obstante, vimos como luce una segunda solucion independiente de la ecuacion diferencial. Esta solucion $y_2(x)$ denominada asi antes tiene la forma

$$y_2(x) = a_1(0)u_1(x)lnx + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0)x^n$$

siendo

$$a_n(s) = (s - s_2)A_n(s) = sA_n(s) \qquad (n \geq 1)$$

Resultando de la formula se recurrencia la siguiente relacion

$$A_n(s) = -\frac{A_{n-1}(s)}{(n+s)(n+s-1)} \qquad (n \geq 1)$$

y por lo tanto deducimos que

$$a_1(s) = -\frac{A_0}{s+1}, \qquad a_2(s) = \frac{A_0}{(s+2)(s+1)^2}, \qquad \dots$$

siendo en general

$$a_n(s) = \frac{(-)^n A_0}{(s+n)[(s+n-1)(s+n-2)\cdots(s+1)]^2} \qquad (n \geq 1)$$

Haciendo uso de la formula de derivacion logaritmica

$$\frac{df}{ds} = f\frac{d}{ds}(lnf)$$

uno obtiene

$$a_n'(s) = -a_n(s)\frac{d}{ds}\left(ln(n+s) + 2\sum_{k=1}^{n-1} ln(s+k)\right) =$$

$$= -a_n(s)\left(\frac{1}{s+n} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{s+k}\right)$$

Por lo tanto, sustituyendo por $s = 0$ se deduce:

$$a'_n(0) = -a_n(0)\left(\frac{1}{n} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)$$

Encontramos, utilizando este resultado

$$a'_1(0) = A_0, \qquad a'_2(0) = -\frac{5}{4}A_0, \qquad a'_3(0) = \frac{5}{18}A_0 \qquad \ldots$$

y en general se tiene

$$a'_n(0) = (-)^{n+1}\frac{\frac{1}{n} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{n!(n-1)!}A_0$$

La expresion para $y_2(x)$ es entonces

$$y_2(x) = -A_0u_1(x)lnx + A_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n+1}\frac{\frac{1}{n} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{n!(n-1)!}x^n\right)$$

o bien en una forma mas amigable como

$$y_2(x) = -A_0\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \ldots\right)lnx - \left(1 + x - \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{18}x^3 + \ldots\right)\right)$$

De esta forma, la solucion general es de la forma $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, en donde se asignan a la constante A_0 valores convenientes en las expresiones de $y_1(x)$ e $y_2(x)$.
Tambien es posible, de acuerdo a los visto al final de la seccion anterior, podemos determinar una segunda solucion si suponemos directamente que es de la forma

$$y_2(x) = Cu_1(x)lnx + \sum_{n=0}^{\infty}B_nx^n$$

ya que entonces siendo $s_2 = 0$, sustituyendo esta expresion en la ecuacion diferencial resulta:

$$Ly \equiv C\left(\left(x\frac{d^2u_1}{dx^2} + u_1\right)lnx + 2\frac{du_1}{dx} - \frac{1}{x}u_1\right) + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)nB_{n+1} + B_n]x^n$$

Como $u_1(x)$ es solucion de la ecuacion $Ly \equiv 0$, se anula en coeficiente de lnx, por lo que la condicion $Ly \equiv 0$ puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)nB_{n+1} + B_n]x^n + C\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\left(\frac{2}{(n!)^2} - \frac{1}{(n+1)!n!}\right)x^n = 0$$

La condicion para que se anule el coeficiente de cualquiera de las potencias x^n es ahora

$$(n+1)nB_{n+1} + B_n = (-)^{n+1}C\frac{2n+1}{(n+1)!n!} \qquad (n \geq 0)$$

y ahora sustituyendo n por sus distintos valores se obtiene

$$B_0 = -C \qquad B_2 = \frac{3}{4}C - \frac{1}{2}B_1 \qquad \ldots$$

Puede verse que tanto B_1 como C son arbitrarios y todos los coeficientes se expresan en funcion de estos, por lo tanto la solucion se escribe como sigue:

$$y_2(x) = C[(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \ldots)lnx - (1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{36}x^3 + \ldots)] + B_1[x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots]$$

Se ve que el coeficiente de B_1 no es otra cosa mas que la serie que figura en la primera solucin $y_1(x)$. De modo que si C y B son arbitrarios, la expresion para $y_2(x)$ representara la solucion general de la ecuacion dada. La expresion particular para $y_2(x)$ obtenida por el primer metodo corresponde a elegir $C = -B_1 = -A_0$.

0.6. Una Clase Particular de Ecuaciones

Muchas ecuaciones diferenciales lineales importantes de segundo orden pueden ser obtenidas particularizando los coeficientes de la siguiente ecuacion.

$$(1 + R_M x^M)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}(P_0 + P_M x^M)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}(Q_0 + Q_M x^M)y = 0 \tag{41}$$

para $M = 1, 2, 3, \ldots$
De nuevo suponemos una solucion de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+s} \tag{42}$$

con

$$f(s) = s^2 + (P_0 - 1)s + Q_0 \tag{43}$$
$$g(s) = R_M(s-M)^2 + (P_M - R_M)(s-M) + Q_M \tag{44}$$

con la ecuacion () vemos que $g_M(s) = g(s)$ y $g_s = 0$ si $n \neq M$, de esta forma la formula de recurrencia () se reduce a

$$f(s+n)A_n = 0 \qquad (1 \leq n \leq M-1) \tag{45}$$

$$f(s+n)A_n = -g(s+n)A_{n-M} \qquad (n \geq M) \tag{46}$$

Ahora tomando $A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_{M-1} = 0$ verificamos (45). Por lo tanto (46) se sigue que $A_n = 0$ a menos que n sea un multiplo de M, $n = kM$ con $k = 1, 2, 3, \ldots$ En esta notacion la solucion supuesta () sera

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{kM+s} \tag{47}$$

donde $B_k = A_{kM}$, convirtiendose por lo tanto (46) en

$$f(s+kM)B_k = -g(s+kM)B_{k-1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{48}$$

En consecuencia se cumple

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{g(s+M)}{f(s+M)}B_0 \\ B_2 &= -\frac{g(s+2M)}{f(s+2M)}B_1 = \frac{g(s+M)g(s+M)}{f(s+M)f(s+2M)}B_0 \end{aligned}$$

y en general se tiene

$$B_k = (-)^k \frac{g(s+M)\dots g(s+KM)}{f(s+M)\dots f(s+kM)}B_0 \tag{49}$$

Recordando que teniamos $f(s) = (s-1)(s-2)$ vemos que (49) se convierte entonces en,

$$B_k(s) = (-)^k \frac{\{g(s+M)\dots g(s+kM)\}}{\{(s+M-s_1)\dots(s+Km-s_1)\}\{(s+M-s_2)\dots(s+kM-s_2)\}} \tag{50}$$

donde tenemos k factores en cada corchete.
Si no se anula nunguno de los factores del denominador para $s = s_1$ o $s = s_2$, los coeficientes de las dos soluciones de la forma

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(s_1)x^{kM+s_1} \qquad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(s_2)x^{kM+s_2}$$

se obtienen explicitamente como se muestra a continuacionc cuando $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} B_k(s_1) &= (-)^k \frac{g(s_1+M)\dots g(s_1+kM)}{[M+(s_1-s_2)]\dots[kM-(s_1-s_2)]}\frac{B_0}{M^k k!} && (51) \\ B_k(s_2) &= (-)^k \frac{g(s_2+M)\dots g(s_2+kM)}{[M-(s_1-s_2)]\dots[kM-(s_1-s_2)]}\frac{B_0}{M^k k!} && (52) \end{aligned}$$

Si asumimos que la diferencia $(s_1 - s_2)$ no es real y negativa, el denominador en (51) no se anula, como tampoco podra anularse el de (52) a menos que los exponentes s_1 y s_2 difieran en un multiplo entero de M.
Los casos excepcionales se estudian de igual manera que en las secciones anteriores.

Si nos encontramos interesados en saber el intervalo de convergencia de las soluciones obtenidas podemos estudiar el cociente de terminos consecutivos de una de las series. Considerando $\sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{kM}$, este cociente sera la razon $\frac{B_k}{B_{k-1}}x^k$y con (48) uno encuentra,

$$-\frac{g(s+kM)}{f(s+kM)}x^M = -\frac{R_M[s+(k-1)M]^2 + (P_M - R_M)[s+(k-1)M] + Q_M}{(s+kM)^2 + (P_0-1)(s+kM) + Q_0}x^M$$

ahora bien, cuando $k \to \infty$ e valor aboluto de este cociente tiende al limite $L_M|x|^M$ donde $L_M = |R_M|$. Por lo tanto el criterio del cociente muestra que la serie lagunar obtenida converge en el interior del intervalo

$$|x| < \sqrt[M]{\frac{1}{|R_M|}}$$

Considerando el extremo donde $R_M x^M = -1$, la serie converge solo si $P_0 - \frac{P_M}{R_M} + M > 0$.
Mientras que en extremo donde $R_M x^M = +1$, la serie converge solo si $P_0 - \frac{P_M}{R_M} + 2M > 0$.

0.6.1. Unas ecuaciones de renombre

Si particularizamos las constantes que aparecen en (41) se obtienen varias ecuaciones de muchisimo interes. Veamos solo algunas

1. la *ecuacion de Bessel*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{53}$$

correspondiendo a $M = 2$, $R_2 = 0$, $P_0 = 0$, $P_2 = 0$, $Q_0 = -p^2$, $Q_2 = 1$. Esta ecuacion la veremos, por ejemplo, al buscar soluciones radiales para el laplaciano del potencial electrostatico con condiciones de contorno homogeneas. Mas adelante se vera que las soluciones para la ecuacion de *Bessel* estaran compuestas por series conocidas como las funciones de *Bessel*. Estas nuevas funciones se hallan siguiendo el mismo desarrollo visto anteriormente en el metodo de *Frobenius* para la ecuacion de *Bessel*.

2. la *ecuacion de Legendre*

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0 \tag{54}$$

correspondiente a $M = 2$, $R_2 = -1$, $P_0 = 0$, $P_2 = -2$, $Q_0 = 0$, $Q_2 = p(p+1)$. Esta ecuacion aparece por ejemplo como la solucion dependiente del angulo azimutal para el laplaciano del potencial electrostatico con condiciones de contorno. Mas adelante se vera que las soluciones de esta ecuacion estaran compuestas por dos series, donde una de estas sera una suma finita conocida como los *polinomios de Legendre*. Esta condicion aparecera como un requerimiento en el metodo de Frobenius al buscar soluciones a la *ecuacion de Legendre*.

3. la *ecuacion de Gauss*

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \tag{55}$$

la cual corresponde a $M = 1$, $R = -1$, $P_0 = \gamma$, $P_1 = -(\alpha+\beta+1)$, $Q_0 = 0$, $Q_1 = -\alpha\beta$.

0.7. Problemas

1. Hallese y clasifiquense los puntos singulares de la ecuacion diferencial

$$x^2(1 - x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1 - x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

2. Utilicese el metodo de Frobenius para obtener la solucion general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, para un entorno de $x = 0$;

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - x^2)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

3. Hallese la solucion general de la ecuacion diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (c - x)\frac{dy}{dx} - ay = 0$$

valida en un entorno de $x = 0$, suponiendo que c no es entero. La solucion regular en $x = 0$ y cuyo valor en ese punto es la unidad, se denomina *funcion hipergeometrica confluente* y se designa con $M(a, c, x)$. Pruebese que si c no es entero, la solucion general es de la forma

$$y = c_1M(a, c; x) + c_2x^{1-c}M(1 + a - c, 2 - c; x)$$

0.8. Problema de Sturm-Liouville y Funciones Ortogonales

- Problema de contorno: Condiciones a ser satisfechas por la ecuacion diferencial ordinaria para dos o mas valores de la variabe independiente en cierto problema fisico. Difiere del problema de condiciones iniciales, o problema de Cauchy en donde las condiciones dadas se refieren a un solo punto.
- Conidion homogenea Una ecuacion o condicion se dice homogenea cuando si se satisface para una funcion particular $y_1(x)$, tambien se verifica para $Cy_1(x)$, en donde C es una constante. Por ejemplo al combinacion de una funcion y sus derivadas que se anule en un punto es una condicion homogenea.

0.8.1. Funciones y Valores Propios en Problemas de Contorno

Consideremos los siguiente ejemplos:

- Ecuacion de cuerda con extremos fijos de longitud L,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad y(0) = y(L) = 0$$

admitiendo soluciones de la forma

$$y(x) = f(x)sen(\omega t + \phi)$$

sustituyendo se tiene

$$sen(\omega t + \phi)f''(x) - \frac{\omega^2}{c^2}sen(\omega t + \phi)f(x) = 0$$

$$\text{siendo } \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) - k^2 f(x) = 0$$

con soluciones para esta nueva ecuacion de la forma $f(x) = e^{\alpha x}$

$$\Rightarrow \alpha^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm k \Rightarrow f''(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

Considerando ahora las condiciones homogeneas en los extremos, $x = 0$ y $x = L$,

$$y(0) = f(0)sen(\omega t + \phi) = (A + B)sen(\omega t + \phi) = 0 \Rightarrow \quad A = -B$$

con la segunda condicion de borde,

$$y(L) = f(L)sen(\omega t+\phi) = A(e^{kL} - e^{-kL})sen(\omega t+\phi) = 0 \Rightarrow \quad 2iAsenKL = 0$$

por lo tanto tenemos $kL = n\pi$, definiendo asi los valores propios $k_n = n\frac{\pi}{L}$ obteniendose asi n soluciones de la forma $y_n(x) = (A_n sen\frac{n\pi}{L}x)sen(\omega t+\phi)$ en donde reconocemos la funcion propia $\Phi_n = sen(n\frac{n\pi}{L}x)$.

- Ecuacion de Laplace con condiciones de contorno homogeneas. Estudiaremos como ejemplo las soluciones radiales de la ecuacion de Laplace en coordenadas cilindricas para el problema de una region cargada con potencial V_0 de radio a en el centro de un plano conductor a potencial cero que dista una distancia d de otro plano paralelo a potencial nulo. Considerando que se tiene una simetria azimutal $\varphi = \varphi(r, z)$ e imponiendo soluciones en variables separables $\varphi = R(r)\Phi(\phi)Z(z)$ tendremos,

$$\frac{1}{R}(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}) + \frac{1}{r^2\phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2\phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\nu^2 \qquad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = +k^2$$

La simetria azimutal nos afirma que en

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\phi = 0 \text{ con solucion } \Phi(\phi) = Ae^{i\nu\phi} + Be^{-i\nu\phi}$$

se debe cumplir que $\nu = 0$, entonces luego de reordenar los terminos en la ecuacion radial y con el cambio de variable $x = kr$ tendremos la ecuacion de Bessel para $\nu = 0$, por lo tanto la solucion general dependera de las funciones de Bessel de orden 0;

$$R(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

Debido al comportamiento divergente de la funcion Y_0 en el origen se tiene $C_2 = 0$, por lo tanto $R(x) = C_1 J_0(x)$. La restante condicion, nuestra condicion homogenea, requiere que esta funcion se anule en $r = a$ por lo que se tiene;

$$R(ka) = C_1 J_0(ka) = 0 \Rightarrow \quad ka = \mathbf{x}_{0n} \Rightarrow \quad k_n = \frac{\mathbf{x}_{0n}}{a} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

en consecuencia $R(kr) = C_n J_0(\frac{\mathbf{x}_{0n}}{a} r)$ en donde los valores de k_n nos definen los valores propios de la funcion propia J_0 estando definida por

$$J_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^j \frac{x}{2}^{2j}}{(j!)^2}$$

0.8.2. Ortogonalidad de las Funciones Propias

Dos funciones $\varphi_m(x)$ y $\varphi_n(x)$ se llaman ortogonales es un intervalo (a, b) si es nula la integral de su producto expandida a dicho intervalo,

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \qquad n \neq m \tag{56}$$

En general, $\varphi_m(x)$ y $\varphi_n(x)$ se denominan ortogonales respecto a un nucleo $r(x)$ en un intervalo (a, b) si

$$\int_a^b r(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \qquad n \neq m \tag{57}$$

Un conjunto de funciones es ortogonal en (a, b) si todos los pares son ortogonales en (a, b). Una propiedad muy util en los problemas de contorno de tipo mas generlal es el hecho de que los conjuntos de autofunciones correspondientes a tales problemas son ortogonales respecto a determinado nucleo.
Con el estudio del problema de contorno relativo a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden podremos establecer esta propiedad. Escribamos una ecuacion lineal homogenea de segundo orden de la siguiente manera[2].

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]\, y = 0 \tag{58}$$

con condiciones de contorno homogeneas prefijadas que en este caso se referiran a los extremos el intervalo (a, b). Mediante el operador,

$$L = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q = p\frac{d^2}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\frac{d}{dx} + q \tag{59}$$

[2]Cualquier ecuacion del tipo $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \lambda a_3(x)y = 0$ se puede llevar a (58) con $p = e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx}$, $q = \frac{a_2}{a_0}p$ y $r = \frac{a_3}{a_0}p$

escribimos entonces (58) como

$$Ly + \lambda r(x)y = 0 \tag{60}$$

y suponiendo que λ_1 y λ_2 son dos valores propios del problema en cuestion, cuyas funciones propias son $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2 x)$ respectivamente, se deduce en ese caso

$$\frac{d}{dx}(p\frac{d\varphi_1}{dx}) + (q + \lambda_1 r)\varphi_1 = 0 \tag{61}$$
$$\frac{d}{dx}(p\frac{d\varphi_2}{dx}) + (q + \lambda_2 r)\varphi_2 = 0 \tag{62}$$

Multiplicando la primera ecuacion por $\varphi_2(x)$, la segunda por $\varphi_1(x)$ y restandolas se tiene,

$$\varphi_2 \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_1}{dx}\right) - \varphi_1 \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_2}{dx}\right) + (\lambda_1 - \lambda_2)r\varphi_1\varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\int_a^b r\varphi_1\varphi_2 dx = \int_a^b \left[\varphi_2 \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_1}{dx}\right) - \varphi_1 \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_2}{dx}\right)\right] dx \tag{63}$$

identificando $g_1 = \varphi_2$, $f_1' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_1}{dx}\right)$, $g_2 = -\varphi_1$ y $f_2' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_2}{dx}\right)$ implementamos integracion a la derecha de la igualdad,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int_a^b r\varphi_1\varphi_2 dx = \left[\varphi_2\left(p\frac{d\varphi_1}{dx}\right) - \varphi_1\left(p\frac{d\varphi_2}{dx}\right)\right]_a^b -$$
$$- \int_a^b \left[\frac{d\varphi_2}{dx}\left(p\frac{d\varphi_1}{dx}\right) - \frac{d\varphi_1}{dx}\left(p\frac{d\varphi_2}{dx}\right)\right] dx$$

dado que el ultimo termino en la ecuacion anterior se anula, tenemos

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int_a^b r\varphi_1\varphi_2 dx = \left[p(x)\left(\varphi_2(x)\frac{d\varphi_1}{dx}(x) - \varphi_1(x)\frac{d\varphi_2}{dx}(x)\right)\right]_a^b \tag{64}$$

Como las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ satisfacen las condiciones de contorno relativas a la ecuacion (58) en $x = a$ y $x = b$, es claro que el segundo miembro de (64) se anula si en cada extremo se prefija una condicion de **una** de las siguientes formas:

$$y = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \qquad y + \alpha\frac{dy}{dx} = 0 \qquad x = a, x = b \tag{65}$$

siendo la ultima condicion equivalente a $\varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2' \equiv (\varphi_2 + \alpha\varphi_2')\varphi_1' - (\varphi_1 + \alpha\varphi_1')\varphi_2'$.

1. Si $p(x) = 0$, en $x = a$ o en $x = b$, se anula el segundo termino en (64) pidiendo que y e $\frac{dy}{dx}$ sean finitos en dicho punto y que $p\frac{dy}{dx}$ tienda a cero.

2. Si $p(a) = p(b)$ tambien se anula este segundo termino si se satisfacen las condiciones $yb = y(a)$, $y'(b) = y'(a)$. **En particular esto se cumplira al ser las funciones periodicas de periodo** $(b - a)$.

En cualquiera de los casos numerados se tiene

$$\boxed{\int_a^b r(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0 \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2} \tag{66}$$

es decir que las funciones propias correspondientes a distintos valores propios son ortogonales respecto al nucleo $r(x)$.

Por lo tanto, un problema de contorno relativo a una ecuacion diferencial del tipo (54) junto con condiciones homogeneas de los tipos considerados, se denomina como *el problema de Sturm-Liouville*. De la ultima relacion deducimos que dos funciones propias distintas, $\varphi_m(x)$ y $\varphi_n(x)$ de un *problema de Sturm-Liouville* son ortogonales con nucleo $r(x)$ en el intervalo considerado.

0.8.3. Ejemplo 2

Consideremos la siguiente ecuacion

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2\frac{dy}{dx} = 0 \qquad y(0) = y(L) = 0, \qquad k_n = n\frac{\pi}{L}, \qquad \varphi_n = sen(\frac{n\pi}{L}x)$$

con $n = 1, 2, 3, \ldots$, y en este caso $r(x) = 1$ por lo tanto

$$\int_0^L \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \int_0^L sen(\frac{n\pi}{L}x)sen(\frac{m\pi}{L}x)dx = 0 \qquad m \neq m$$

cosa que es facil de verificar como cierta.
La integral formada con el mismo nucleo del cuadrado de una funcion propia $\varphi_n(x)$ tendra un valor positivo.[3]

$$C_n = \int_a^b r(x)|\varphi_n(x)|^2 dx$$

Eligiendo el factor convenientemente en la definicion de $\varphi_n(x)$ podremos hacer que C_n valga la unidad. Con esto $\varphi_n(x)$ estara normalizada respecto al nucleo $r(x)$. En el caso anterior

$$C_n = \int_L^0 sen^2\frac{n\pi}{L}xdx = \frac{L}{2} \Rightarrow \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}sen\frac{n\pi}{L}x$$

0.8.4. Desarrollo de una Funcion en Serie de Funciones Ortogonales

Dado $\{\varphi_n(x)\}$ ortogonal en (a, b) respecto a un nucleo $r(x)$ conocido, quiero desarrollar una $f(x)$ dada em una serie cuyos terminos sean

$$f(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) \tag{67}$$

[3]En aplicaciones fisicas las funciones $p(x)$ y $r(x)$ son positivas en (a, b)

Supondremos que tal desarrollo existe y multiplicando ambos miembros por $\varphi_k(x)r(x)$, la $k-$esima funcion del conjunto,

$$r(x)f(x)\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r(x)\varphi_n(x)\varphi_k(x) \tag{68}$$

integrando sobre (a, b) e intercambiando el simbolo sumatoria con el de integracion, o sea, asumiendo que la serie converge uniformemente en (a, b)

$$\int_a^b r(x)f(x)\varphi_k(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_a^b r(x)\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx$$

que no hemos hecho otra cosa que realizar el producto interno entre dos elementos del conjunto $\{\varphi_n(x)\}$, y en virtud de la ortogonalidad de este conjunto se tiene,

$$\boxed{A_n \int_a^b r(x)\left[\varphi_n(x)\right]^2 dx = \int_a^b r(x)f(x)\varphi_n(x)dx} \tag{69}$$

Si la funcion a desarrollar $f(x)$, fuese ortogonal a todo el conjunto $\{\varphi_n(x)\}$ respecto de $r(x)$, todos los terminos serian nulos y por ende no tendriamos desarrollo alguno. Funciones de este tipo son puramente matematicas sin sentido fisico. Salvo estos casos patologicos, es posible demostrar que no existen funciones que sean ortogonales respecto a todos los elementos del conjunto asi construido.
En este sentido diremos que los conjuntos son **completos**.
Si las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son regulares en el intervalo (a, b) y si ademas las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son positivas en todo el intervalo, incluido los extremos, es sabido que la representacion formal de una funcion $f(x)$, acotada y parcialmente diferenciable, mediante una serie de funciones propias de la ecuacion () converge hacia la funcion $f(x)$ con x$\in (a, b)$. y a $1/2[f(x^+) + f(x^-)]$ en los puntos de discontinuidad finita.

0.9. Problemas de Contorno Relativos a Ecuaciones Diferenciales no Homogeneas.

Buscamos ahora soluciones a la ecuacion

$$\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy\right] + \lambda ry = F(x) \tag{70}$$

con determinadas condiciones de contorno homogeneas de los tipos dados en (65). Podemos expresar la pasada ecuacion siguiendo la notacion (60),

$$Ly + \lambda ry = F(x) \tag{71}$$

Si asociamos al problema dado, el problema de contorno equivalente a satisfacer la ecuacion homogenea, tendremos,

$$Ly + \lambda ry = 0 \tag{72}$$

Expresemos la funcion desconocida y en (70) mediante una serie de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{73}$$

en donde trataremos de determinar los coeficientes a_n. Para hacer esto sustituyamos (73) en (70) y como tenemos en (72) la relacion

$$L\varphi_n = -\lambda_n r \varphi_n$$

la ecuacion (70) se convierte en

$$r(x) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) a_n \varphi_n(x) = F(x) \tag{74}$$

por lo tanto utilizando (69) para calcular los coeficientes del desarrollo uno obtiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n = \frac{F(x)}{r(x)} \tag{75}$$

Comparando ahora (75) con (76) tenemos que $a_n = \frac{A_n}{\lambda - \lambda_n}$. Por lo tanto la solucion al problema no homogeneo (75) sera

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) = \frac{A_0}{\lambda - \lambda_0} \varphi_0(x) + \frac{A_1}{\lambda - \lambda_1} \varphi_1(x) + \dots} \tag{76}$$

Algunas conclusiones importantes,

1. Si $F(x) = 0$. Existe solucion no trivial para (70) si y solo si $\lambda = \lambda_k$ donde λ_k es valor propio del problema homogeneo para todo k.

2. Si $F(x) \neq 0$ Existe solucion si $\lambda \neq \lambda_k$ en donde λ_k es valor propio del problema homogeneo para todo k. Ademas si $\lambda \to \lambda_k$, no existe (76) a menos que $A_k = 0$, es decir que a menos que

$$\int_a^b r(x) f(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b F(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

que es equivalente a que $F(x)$ sea ortogonal a $\varphi_k(x)$ respecto de $r(x)$.

0.10. Series de Bessel-Fourier.

A modo de ejemplo del metodo presentado en la seccion anterior, consideraremos un desarrollo en funciones propias ortogonales para la ecuacion de *Bessel*. Se presentan con frecuencia desarrollos en serie de funciones de Bessel en relacion con ciertos problemas de contorno donde interviene la ecuacion diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\mu^2 x^2 - p^2) y = 0 \tag{77}$$

o bien

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \left(-\frac{p^2}{x} + \mu^2 x\right) y = 0 \tag{78}$$

Las soluciones para la ecuacion de una membrana o para soluciones a la ecuacion radial del laplaciano del potencial electrostatico son dos ejemplos en donde encontramos estas ecuaciones. Recordando la solucion general

$$y = C_1 J_p(\mu x) + C_2 J_{-p}(\mu x) \quad p \text{ no entero} \tag{79}$$
$$y = C_1 J_p(\mu x) + C_2 Y_p(\mu x) \quad p \text{ entero} \tag{80}$$

vemos que (78) es un caso particular de (70) siendo

$$p(x) = x \quad q(x) = -\frac{p^2}{x} \quad r(x) = x \quad \lambda = \mu^2 \tag{81}$$

Dado que $p(0) = 0$ y que el dominio es $(0, L)$, vemos que las funciones propias del problema son ortogonales en este dominio respecto de $r(x) = x$.[4]
Como deseamos que en el origen la solucion no diverja, tenemos que $C_2 = 0$ en 80.
Ahora si fijamos en $x = L$ al condicion $y(L) = 0$, los valores de μ que verifican esta condicion quedan determinados como las raices de la ecuacion

$$J_p(\mu_n L) = 0 \tag{82}$$

Veamos que ecuaciones deben verificarse a partir de las distintas condiciones de contorno homogeneas.

$$y(L) = 0 \quad J_p(\mu_n L) = 0 \tag{83}$$
$$y'(L) = 0 \quad J'_p(\mu_n L) = 0 \tag{84}$$
$$ky(L) + y'(L) = 0 \quad kJ_p(\mu_n L) + \mu_n J'_p(\mu_n L) = 0 \tag{85}$$

En todos los casos las funciones propiasson de la forma

$$\varphi_n(x) = J_p(\mu_n x) \tag{86}$$

en donde μ_n sera solucion de (83), (84) o (85). y como vimos dichas funciones son ortogonales en $(0, L)$ respecto al nucleo $r(x) = x$

$$\int_0^L x J_p(\mu_m x) J_p(\mu_n x) dx = 0 \quad m \neq n \tag{87}$$

Aunque (78) es uno de los casos excepcionales ya que $p(x)$ y $r(x)$ se anulan en $x = 0$ y ademas $q(x)$ no es regular en dicho punto a menos que el orden de la funcion de Bessel sea 0, se puede demostrar que la serie formal (67), un desarrollo en funciones propias ortogonales de un problema de contorno con coeficientes dados por (68), convergera a hacia $f(x)$ en $(0.L)$ en las mismas condiciones establecidas para las series de Fourier.
Dado que $J_p(-x) = (-)^p J_p(x)$, las soluciones a (83), (84) y (85) existen en parejas y son simetricas respecto del origen. Cambiando μ_n por $-\mu_n$ en (86) o bien, $\varphi_n(x)$ no cambia o queda multiplicada por un factor numerico por lo que

[4]Para esto basta que y sea finita, que $x\frac{dy}{dx}$ sea cero en $x = 0$ y que en $x = L$ se prefije una condicion homogenea cualquiera.

no precisaremos de los $\mu_n < 0$.
Con todo lo anterior tenemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_p(\mu_n x) \qquad (0 < x < L) \tag{88}$$

siendo μ_n las raices de (83), (84) y (85).
Los A_n estaran dados por

$$A_n \int_0^L x \left[J_p(\mu_n x)\right]^2 dx = \int_0^L x f(x) J_p(\mu_n x) dx \tag{89}$$

y definiendo el factor junto a A_n como

$$C_n = \int_0^L x |J_p(\mu_n x)|^2 dx \tag{90}$$

se tiene

$$A_n = \frac{1}{C_n} \int_0^L x f(x) J_p(\mu_n x) dx \tag{91}$$