

# Introducción a la Cosmología y Estructuras a Gran Escala

Sebastian Bruzzone

Octubre 2006

# Índice general

0.1.	Introduccion . . . . .	1
0.2.	Observaciones . . . . .	1
0.2.1.	Redshift . . . . .	2
0.2.2.	Radiacion Cosmica de Fondo . . . . .	2
0.2.3.	Abundancia Primordial de Elementos . . . . .	2
0.2.4.	La edad del Universo . . . . .	2
0.2.5.	Estructuras . . . . .	3
0.3.	Modelos Cosmologicos . . . . .	3
0.3.1.	Redshift . . . . .	5
0.3.2.	El Universo Hoy . . . . .	6
0.3.3.	El Universo Temprano . . . . .	9
0.3.4.	Horizontes . . . . .	10
0.3.5.	Historia Termal, la relacion t-T . . . . .	11
0.3.6.	Nucleosintesis . . . . .	13
0.3.7.	Radiacion Cosmica de Fondo (CMB) . . . . .	15
0.4.	Inflacion . . . . .	18
0.4.1.	Motivacion para la Inflacion . . . . .	18
0.4.2.	El problema de la chatura . . . . .	18
0.4.3.	Problema del Horizonte . . . . .	19
0.4.4.	Reliquias No Deseadas . . . . .	20
0.4.5.	Definicion de Inflacion . . . . .	20
0.4.6.	Campos Escalares en Cosmologia . . . . .	22
0.4.7.	Aproximacion Estandar a la Inflacion:Slow-Roll Inflation . . . . .	23
0.4.8.	Relaciones entre inflacion y el desarrollo lento . . . . .	24
0.4.9.	Cantidad de Inflacion . . . . .	24
0.4.10.	Soluciones exactas . . . . .	25
0.5.	Estructuras . . . . .	26
0.5.1.	Ideas generales . . . . .	26
0.5.2.	El modelo mas simple para el origen de estructuras(Revisando las Ideas Generales) . . . . .	28
0.5.3.	Fluctuacion de Vacio . . . . .	29
0.5.4.	Evolucion lineal de perturbaciones cosmologicas. . . . .	29
0.5.5.	Entrando al horizonte y la perturbacion de curvatura $R$ . . . . .	30
0.5.6.	Anisotropias en CMD a grandes angulos . . . . .	31
0.5.7.	Anisotropias en CMB a gran escala y formacion de estructuras. . . . .	31
0.6.	Algunos valores del WMAP . . . . .	32
.1.	Ideas sobre Relatividad General . . . . .	32

## Resumen

El fin de este trabajo es presentar una introducción a la Cosmología, las ecuaciones más importantes relacionadas con la evolución del Universo, así como también de una inspección general del modelo del Hot Big Bang en la sección **Modelos Cosmológicos**. A pesar de ser un modelo exitoso en la descripción de las abundancias primordiales de elementos, presenta dificultades a la hora de abordar temas como la sorprendente homogeneidad de la radiación cósmica de fondo, la edad del Universo, las aparentes condiciones iniciales particulares para el Universo actual y de la creación de estructuras primordiales. Como forma de enfrentar estas y otras cuestiones, un modelo inflacionario es brevemente discutido seguido del modelo del Hot Big Bang en la sección **Inflación**. En esta sección se presentarán nociones elementales de un modelo inflacionario como así de los campos que son sospechosos de generar tal proceso de expansión. Como final, discutiremos brevemente cómo la materia oscura podría ser la encargada de la creación de las primeras anisotropías en la densidad, dando origen así a las primeras galaxias en la sección **Estructuras**. Dentro de esta última sección, se presentan, sin mucha argumentación, algunas herramientas avanzadas para describir la evolución de las perturbaciones encargadas de la aparición de las primeras estructuras.

## 0.1. Introduccion

La premisa central en la cosmología moderna es que al menos a gran escala, el Universo es homogéneo e isotrópico. Esto ha sido inferido de las observaciones, más espectacularmente de la casi igualdad en la temperatura de la radiación cósmica de fondo. No obstante, a pesar de esta homogeneidad a gran escala, son bien conocidas las inhomogeneidades en regiones a escalas menores, donde el material aglomera en galaxias y en cúmulos de galaxias. Se cree que estas irregularidades han crecido con el tiempo a través de mecanismos gravitacionales, partiendo de una distribución casi homogénea en un pasado. El comportamiento a gran escala del Universo puede ser descrito si asumimos que este es homogéneo e isotrópico en la mayoría de su extensión. Luego imponemos irregularidades a corta escala. En la mayor parte de la evolución del Universo, estas irregularidades pueden ser consideradas pequeñas perturbaciones en dicha evolución, y que podrán ser abordadas usando una teoría lineal de perturbaciones.

La piedra angular de la cosmología moderna es la teoría de **nucleosíntesis** (Pagel 1997; Schramm y Turner 1998), donde se explica la abundancia primordial de los elementos más livianos en la tabla periódica. Esta teoría se apoya en el modelo del **Hot Big Bang**, y su éxito nos asegura que el modelo da una correcta descripción del Universo empezando en alguna época antes de la generación de los elementos livianos, la nucleosíntesis.

En un principio la densidad de energía estaba dominada por las partículas ultrarelativistas, llamadas **radiación** y luego dominada por las partículas no relativistas, **materia**. En contraste con esta imagen que tenemos del Universo, no se sabe con certeza cómo se comportó el Universo un tiempo muy anterior a la nucleosíntesis. Se piensa, de acuerdo al Modelo Estándar de partículas elementales, que el Universo era gaseoso en épocas muy tempranas salvo por muy breves transiciones de fase. Siendo poco específicos, esta era gaseosa generalmente se le conoce como el Big Bang, donde el término caliente se omite porque no tiene necesariamente que estar en equilibrio termodinámico o ser dominado por radiación. Antes de esto se supone que existió una época de **inflación**, durante la cual la densidad de energía estuvo dominada por el potencial de los campos escalares. La Inflación se supone que determina las condiciones iniciales para el Big Bang, incluida las perturbaciones. En las últimas secciones se iguala la velocidad de la luz,  $c$  a uno, de manera que las velocidades se expresen en fracciones de la velocidad de la luz. Donde sea relevante se igualará  $\hbar$  a uno. También es conveniente a menudo tomar la energía como unidad, y si igualamos la constante de Boltzmann a uno tendremos también la temperatura medida en unidades de energía. Con la constante de Newton  $G$  definimos la **Masa Reducida de Planck**  $M_{Pl} = (8\pi G)^{-1/2}$ . Con un valor para  $M_{Pl} = 4,342 \times 10^{-6} \text{g}$  la cual se convierte en una energía de  $2,436 \times 10^{18} \text{GeV}$

## 0.2. Observaciones

Cualquier modelo del Universo debería ser capaz de explicar o describir las siguientes observaciones.

### 0.2.1. Redshift

Las líneas espectrales de galaxias lejanas están desplazadas hacia el rojo, donde observacionalmente uno encuentra la siguiente relación conocida como *Ley de Hubble*

$$cz \equiv \frac{c\Delta\lambda}{\lambda} = H_0 dr \quad (1)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda,  $dr$  es la distancia de dos observadores solidarios a la expansión del Universo, o "comoving observers". Aquí  $c$  sería igual a uno y  $H_0$  es la constante de Hubble cuyo valor reciente es:

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (2)$$

La incertidumbre  $h$  fue por mucho tiempo bastante grande ( $0,4 < h < 1$ ). Mediciones con el telescopio Hubble indican que  $h = 0,65 \pm 0,08$ . Valores más recientes del satélite WMAP dan  $h = 0,71 \pm 0,04$

### 0.2.2. Radiación Cósmica de Fondo

En todas direcciones uno observa una radiación de cuerpo negro a una temperatura de  $T = 2,74\text{K}$ . Esta coincide extremadamente bien con la distribución de Planck, es más, es el mejor ajuste jamás obtenido para dicha curva. Las anisotropías en escalas angulares de alrededor de 7 grados descubiertas por el satélite COBE son del orden de

$$\frac{\delta T}{T} \approx 10^{-5} \quad (3)$$

Se han encontrado fluctuaciones de temperatura a menores distribuciones angulares por los experimentos con globos Boomerang y Maxima y por el satélite WMAP.

### 0.2.3. Abundancia Primordial de Elementos

Si uno trata, a partir de observaciones, de estimar las abundancias primordiales de elementos antes de que la materia fuese procesada en las estrellas uno obtiene las siguientes fracciones:

$$\begin{aligned} \frac{{}^4\text{He}}{(H + {}^4\text{He})} &\approx 0,25 \\ \frac{D}{H} &\approx \frac{{}^3\text{He}}{H} \approx 10^{-4} - 10^{-5} \\ \frac{{}^7\text{Li}}{H} &\approx 10^{-10} \end{aligned}$$

### 0.2.4. La edad del Universo

La edad de las estrellas en cúmulos globulares están estimadas en  $15 \pm 3$  Gyrs ( $1\text{Gyrs} = 10^9$  años). Estudios de 1997 indican que las edades de estas viejas estrellas pueden haber sido sobrestimadas, dando una cota superior para ellas cercana a 10 Gyrs.

### 0.2.5. Estructuras

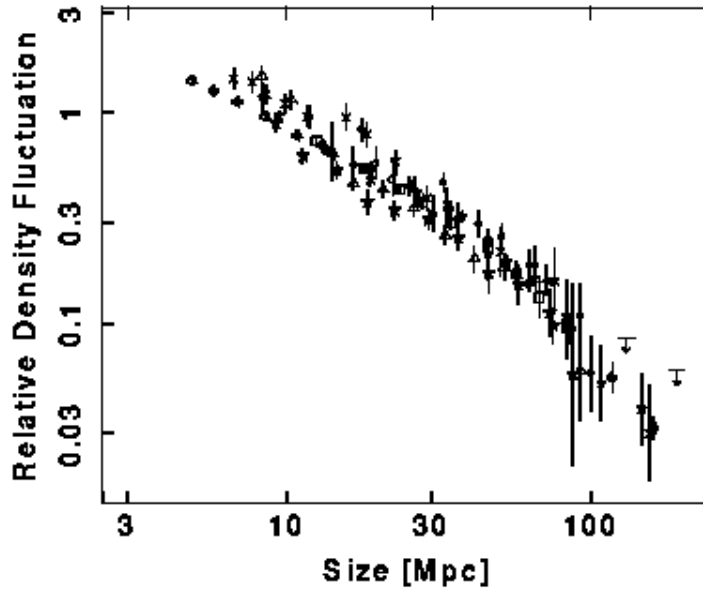


Figura 1: Fluctuacion relativa en densidad como funcion de la escala en Mpc

La materia se encuentra condensada en estrellas, galaxias y cumulos de galaxias. A grandes escalas de alrededor de 100Mpc la materia se agrupa en estructuras filamentosas que encierran grandes volumenes vacios o desprovistos de materia. A escalas aun mayores se observa una distribucion homogenea, y el Universo parece casi el mismo en cualquier direccion donde se mire, es isotropico. La parte visible del Universo es alrededor de 3000Mpc.

## 0.3. Modelos Cosmologicos

Asumiremos que el Universo es homogeneo e isotropico para simplificar las cosas. Asumiremos tambien que la materia puede ser descrita como un fluido perfecto. Es decir que se tiene un fluido cuya entropia se conserva (no tenemos viscosidades ni flujo de calor). Dicho fluido sera caracterizado por una densidad  $\rho$ , en un marco en reposo de materia con presion  $p$ . Entonces podemos pensar en las galaxias, en promedio<sup>1</sup>, como las moleculas en un fluido, ubicadas en posiciones espaciales fijas. La distancia relativa entre las galaxias crecera con el tiempo debido a la expansion del Universo, esta distancia sera proporcional al factor de escala  $a(t)$  donde  $t$  es el tiempo cosmico.

Un comoving point<sup>es</sup> un punto que se mueve con la expansion del Universo, definido formalmente como como la ubicacion de un observador que mide una densidad de momento igual a cero. La distancia para un comoving point" dado,

<sup>1</sup>Usaremos el promedio para no considerar galaxias con velocidades peculiares

medida desde nuestra ubicacion, puede ser escrita como  $r(t)=xa(t)$ . Donde la constante  $x$  es la comoving distance es igual a la distancia fisica en la presente epoca. Una variable un poco diferente, conocida como el **tiempo conforme** es de utilidad<sup>2</sup>. Esta se define como

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)}$$

Para una partícula moviéndose a velocidad  $c=1$ , la coordenada de distancia viajada en un intervalo de tiempo conforme  $\Delta\tau$  es  $\Delta\tau$ .

En cualquier epoca, la razón de expansión del Universo viene dada por el **parametro de Hubble**,  $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ . El tiempo de Hubble  $H^{-1}$  y la longitud de Hubble  $cH^{-1}$  coinciden al valer  $c = 1$

La distancia de Hubble es de vital importancia debido a que nos provee de un estimativo de la distancia en la que la luz puede viajar durante un intervalo de tiempo en el cual el Universo se ha expandido apreciablemente. Esta distancia comunmente se le denomina **horizonte**. Debido a la finitez de la velocidad de la luz no podemos ver a distancia arbitrariamente grandes por lo que existira un llamado **horizonte de particulas**. Este ultimo horizonte nos dara una idea de la distancia viajada por la luz desde el origen del Universo, con  $a = 0$ . Podemos definir un ultimo horizonte, conocido como **horizonte de sucesos**, que sera la distancia viajada por la luz en un futuro.

Para muchos propositos, uno puede ignorar la expansión del Universo en una region mucho menor que la distancia de Hubble, en un intervalo de tiempo mucho menor que el tiempo de Hubble, en pocas palabras, en la escala de Hubble(region en espacio-tiempo). Procesos como la propagación de ondas o el establecimiento de equilibrio termodinamico ocurren como si no hubiese expansión alguna. Estos procesos no pueden concebirse a grandes escalas. Veremos mas adelante en el estudio de las inhomogeneidades como poder cuantificar escalas espaciales, es decir, dada una escala como esta se compara con la escala de Hubble correspondiente, digamos, longitud de Hubble. Las perturbaciones seran analizadas mediante un desarrollo de Fourier en un numero de onda solidario a la expansión, o un comoving wave number<sup>3</sup>  $k$ . El inverso de este numero de onda define una longitud para la escala correspondiente a un modo particular de las inhomogeneidades. Al menos mientras las perturbaciones tengan pequeñas amplitudes, estas seran "estiradas" por la expansión por lo cual considerar unidades solidarias a la expansión sera favorable. Podremos comparar los modos con la longitud de Hubble considerando el cociente  $\frac{k}{aH}$ , si es mayor que 1, el modo se dice que estara dentro del horizonte, mientras que si es menor que la unidad, el modo estara fuera del horizonte, lo cual significa que la escala es demasiado grande como para ser afectada por procesos causales.

Con lo asumido anteriormente, se puede probar que los unicos elementos de línea que verifican las ecuaciones de Einstein tienen la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \right) \quad (4)$$

<sup>2</sup>Sera muy util al momento de interpretar diagramas de espacio-tiempo

que son las soluciones con simetría esférica para el vacío de las ecuaciones de Einstein, donde  $k$  puede ser elegido como 1,0 o  $-1$  de acuerdo si  $k < 0$ ,  $k = 0$  o  $k > 0$ . Estos elementos de línea describen espacios que se expanden o comprimen en el tiempo debido a un factor de escala  $a(t)$  y  $t$  es el tiempo propio medido por un observador fijo en coordenadas espaciales. En estos modelos uno podrá hablar de tiempo cósmico.

$k = 0$ : El espacio es plano, no siendo así el espacio-tiempo. Es como el espacio ordinario, infinito en extensión. Un Universo abierto.

$k < 0$  ( $k = -1$ ): Este es también un Universo abierto pero con geometría hiperbólica.

$k > 0$  ( $k = +1$ ): Este espacio es finito, el así llamado Universo cerrado. Es el análogo a una esfera bidimensional pero en un espacio de cuatro dimensiones, no siendo espacio-tiempo.

Una forma análoga de escribir el elemento de línea es:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (d\chi^2 + \sigma(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2)) \quad (5)$$

Siendo  $r = \sigma = \{\sin\chi, \chi, \sinh\chi\}$  para  $k = \{+1, 0, -1\}$  respectivamente. En esta ecuación el tiempo propio es simplemente  $t$  para galaxias solidarias a la expansión.

### 0.3.1. Redshift

Veremos como ahora el redshift en las líneas espectrales de galaxias puede ser explicado en términos de un Universo en expansión. Supongamos que se envía una señal luminosa es enviada desde el punto  $(\chi_1, \theta_1, \phi_1)$  en un tiempo  $t_1$  y es recibida en coordenadas  $(0, \theta_1, \phi_1)$  en un tiempo  $t_0$ , o sea en el presente. Este sería un camino radial ya que  $d\theta = 0$  y  $d\phi = 0$  de otra forma el Universo no sería isotrópico.

Como sabemos, las señales de luz viajan siguiendo geodésicas en el espacio-tiempo, verificando entonces  $ds^2 = 0$ .

$$ds^2 = 0 \Rightarrow 0 = c^2 dt^2 - a(t)^2 d\chi^2 \quad (6)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \chi_1 \quad (7)$$

De forma similar para una señal enviada en  $t_1 + dt_1$  y recibida en  $t_0 + dt_0$

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{cdt}{a(t)} = \chi_1 \quad (8)$$

Restando (7) y (8) tenemos:

$$0 = \int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{cdt_0}{a(t_0)} - \frac{cdt_1}{a(t_1)} \quad (9)$$

si asumimos que el tiempo entre las dos señales  $dt$  corresponde a un periodo,  $T = \lambda/c$ , ya que como este es infinitamente más pequeño que la edad del universo, podemos además considerar  $a$  constante:

$$\frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{dt_0}{dt_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \quad (10)$$



Notar que la longitud de onda crecera proporcionalmente con el factor de escala  $a(t)$ . Obtenemos entonces el **redshift**:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \equiv \frac{a_0}{a_1} - 1 \quad (11)$$

Podemos ahora desarrollar  $a_1$  alrededor de  $t_0$ (presente):

$$a(t_1) = a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t_0} (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t_0} (t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (12)$$

Con esto hecho, sustituyendo en la definicion de redshift, uno encuentra:

$$z = H_0(t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t_1)^2 + \dots \quad (13)$$

en donde  $H_0 \equiv \frac{\dot{a}_0}{a_0}$  y  $q_0 = -\frac{a_0 \ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2}$ .

Tenemos que la constante de Hubble nos da una medida de la velocidad de expansion del Universo y  $q_0$ , **el parametro de desaceleracion**, una medida de como se frena la expansion en la actualidad. Este parametro  $q_0$  es de importancia ya que uno esperaria que la gravedad enlenteciese la expansion del Universo debido a la accion conjunta de toda la materia presente en este. Vemos que para pequñas distancias  $d \approx (t_0 - t_1)$ , encontramos asi la ley de Hubble:

$$cz = H_0 d \quad (14)$$

Es decir cuando  $z \ll 1$ , el redshift viene dado por la conocida Ley de Hubble. En distancias equivale a tener  $d \ll \frac{c}{H_0} = 4 \times 10^3 Mpc$ .

Es deseable especificar tiempos y distancias en terminos del redshift. Cuando es utilizado para medir un tiempo, significa el tiempo en el cual el factor de escala era una fraccion  $1/(1+z)$  de su valor presente. Cuando se desea utilizarlo para inferir una distancia, significa la distancia que la luz puede viajar en ese tiempo.

### 0.3.2. El Universo Hoy

Asumiendo que el espacio es homogeneo e isotropico, las ecuaciones de Einstein se reducen a:

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} + k = \frac{8\pi G \rho a^2}{3c^2} \quad (15)$$

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -3 \frac{p}{c^2} \dot{a} a^2 \quad (16)$$

Tenemos que la segunda ecuacion es equivalente a la conservacion de la energia para una expansion adiabatica,  $dE = -PdV$ . En donde  $E = c^2 \rho V$  es la energia interna en un volumen solidario a la expansion  $V \propto a^3$ .

Podremos describir el Universo en el presente si aproximamos la presion a cero. Con esto la ecuacion (16) se convierte en

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 = \text{constante} \quad (17)$$

Como tenemos que el volumen es proporcional con  $a^3$ , esta ecuación nos muestra que la materia (o bien la energía) son conservadas. Sustituimos esto último en (15), tendríamos entonces:

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} + k = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\rho_0 a_0^3}{a} \quad (18)$$

evaluando lo anterior en  $t = t_0$ , podemos reagrupar encontrando:

$$k = a_0^2 \frac{8\pi G}{3c^2} \left( \rho_0 - \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \right) \quad (19)$$

$$H_0 \equiv \frac{\dot{a}_0}{a_0} \quad (20)$$

Podemos ver de esta ecuación, que conocido un valor para  $H_0$ , podemos determinar el signo de  $k$  a partir de la densidad actual.

De aquí es claro que existe una densidad particular para la cual el Universo será plano (en ausencia de una constante cosmológica):

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (21)$$

$$\rho_c \equiv \frac{3H(t)^2}{8\pi G} \quad (22)$$

en donde la primera nos da la densidad crítica actual y otra en función del tiempo. Con esto podemos diferenciar tres distintos casos:

Si  $k = 0$ : La densidad actual coincide con la crítica. El espacio es infinito y plano

Si  $k > 0$ : La densidad actual es mayor que la crítica. El espacio es finito y cerrado

Si  $k < 0$ : La densidad actual es menor que la crítica. El espacio es abierto e infinito.

Usualmente se prefiere medir la densidad de energía como fracción de la densidad crítica, definiendo el **parámetro de densidad**  $\Omega = \rho/\rho_c$ . Esto puede aplicarse por separado a las diferentes componentes de materia en el Universo, como materia no relativista, y radiación. A partir de las ecuaciones de Einstein (15) y (16) y de la definición del parámetro de desaceleración  $q_0$  se puede mostrar que uno obtiene:

$$q_0 \equiv \frac{-a_0 \ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2} = \frac{\rho_0}{2\rho_c} \equiv \frac{1}{2} \Omega_0 \quad (23)$$

Siendo  $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c}$ , el cociente de la densidad actual con la crítica. Con esta última expresión para  $q_0$  podemos expresar la ecuación para  $k$ , ecuación (19) en función de este parámetro.

$$k = \frac{a_0^2 8\pi G \rho_c}{3c^2} (2q_0 - 1) \quad (24)$$

Hemos obtenido entonces dos formas de determinar la geometría del Universo actual a partir del conocimiento de  $H_0$  y  $\rho_0$  o solamente de  $q_0$

Mediciones recientes (Perlmutter et al, Riess et al., 1998), usando supernovas tipo AI como candelas estándar indican que el parámetro de desaceleración es negativo!.

- Mediciones del 2003

$$\begin{aligned} H_0 &= 71 \pm 4 \text{Kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \\ q_0 &= -0,60 \pm 0,05 \end{aligned}$$

Es decir, que el Universo esta acelerandose en su expansion. Si incluimos un termino extra en la expresion para  $q_0$  correspondiente a una presion, esta seria negativa y se obtendria un universo en aceleracion. Otra forma de verlo es incluir la llamada **Constante Cosmologica**,  $\Lambda$  que posee propiedades similares a una presion negativa. Con una constante cosmologica las ecuaciones de Einstein cambian a :

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (25)$$

$$\text{reducida a } \frac{H^2}{c^2} = \frac{\rho 8\pi G}{3c^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (26)$$

Siendo la ultima ecuacion conocida como ecuacion de Friedmann. De esta ultima ecuacion resulta bien claro como definir la densidad critica para el caso de un Universo plano con una constante cosmologica  $\Lambda$ .

Podemos obtener la ecuaciones de Friedmann, correspondientes a (15) y (16) si sustituimos  $p$  y  $\rho$  por las nuevas variables  $p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$  y  $\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$  respectivamente. Se puede considerar que la  $\Lambda$  da origen a una **densidad constante de energia**  $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$ . Con esto, y de manera similar a la definicion de  $\Omega$  para la materia relativista, no relativista y barionica, podemos definir:  $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$ . Tendremos entonces:

$$\Omega_{total} = \Omega + \Omega_\Lambda \quad (27)$$

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad (28)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (29)$$

$$\Omega_{total} - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (30)$$

Miremos ahora el comportamiento de los modelos para diferentes valores de  $k$ . Tomando en este primer caso  $\Lambda = 0$ .  $k = 0$ :

Para este Universo se tiene  $\Omega_0 = 1$ . Por lo tanto (18) se convierte en:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a} \quad (31)$$

Integrando se obtiene:

$$a = C_1 t^{2/3} \quad (32)$$

$$C_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3}\right)^{1/3} \quad (33)$$

Tenemos entonces que el Universo crece con el tiempo y que  $a \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Por lo tanto en un comienzo la densidad era infinita, el momento del Big Bang. Veamos como luce el parametro de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad (34)$$

entonces la edad del Universo seria:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (35)$$

y evaluando con los valores para  $H_0$  se tiene:

$$8,9 \times 10^9 y < t_0 < 11,4 \times 10^9 y \quad (36)$$

Este resultado estaria por debajo del limite inferior para la estimacion de la edad del Universo.

### Con constante cosmologica

Todavia es valido  $\rho A^3 = \rho_0 A_0^3 = const$ , con la ecuacion de Friedmann (26) y lo anterior tenemos la ecuacion siguiente(37). Si tenemos un valor chico para  $a(t)$ , el segundo termino de la ecuacion puede despreciarse y tendríamos un comportamiento como a ecuacion anterior. No obstante de ser  $a(t)$  grande, el primer termino seria despreciable y tendríamos entonces una solucion exponencial.

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a} + \frac{\Lambda a^2 c^2}{3} \quad (37)$$

$$a(t) = a_0 \exp c \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} (t - t_0) \quad (38)$$

Entonces uno podria pensar que la accion de una constante cosmologica es despreciable en los origenes o primeras etapas del Universo, mientras que dominara ampliamente en el futuro. Si inspeccionamos  $\Omega_\Lambda$ , vemos que esta tiende a cero si nos movemos hacia atras en el tiempo. Cabe notar que para un valor dado de la constante de Hubble un modelo con una constante cosmologica daria un Universo mas viejo.

### 0.3.3. El Universo Temprano

El modelo anterior no describe correctamente al Universo todo el camino hacia atras en el tiempo, ya que en un principio esperaríamos encontrar a la radiacion jugando un papel mas importante.

La presion para un gas de fotones y particulas ultra relativistas es dada por:

$$p = \frac{1}{3} \rho c^3 \quad (39)$$

La densidad de energia es proporcional a  $T^4$  donde  $T$  es la temperatura. El coeficiente depende, como veremos, del tipo de particulas involucradas en equilibrio con los fotones. Con la expresion para la presion de un gas de fotones, (16) se convierte en:

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -\rho \dot{a} a^2 \quad (40)$$

integrando se obtiene:

$$\rho a^4 = \text{constante} \quad (41)$$

Tenemos que la densidad de energia cae mas rapido que en el caso sin presion. Es decir, que la energia no se conserva. Recordar que  $V \propto a^3$ . Partiendo de  $dE = -PdV$  uno encuentra que se precisa energia para contrarestar la presion durante la expansion. Ademas se tiene el redshift de los fotones, como habiamos visto, la longitud de onda crece proporcionalmente con el factor de escala, o sea que  $\nu \propto 1/a(t)$  y por lo tanto la energia de los fotones  $h\nu$  decaera segun lo anterior. Como la densidad de energia es proporcional a  $T^4$ , uno obtiene de la ultima ecuacion(41):

$$T \propto \frac{1}{a} \quad (42)$$

y entonces tenemos que la temperatura tendera a infinito al tender  $a(t)$  a cero. Otra forma de ver lo anterior es derivar la entropia de este gas de particulas a partir de la segunda ley de la termodinamica,  $dE = TdS - PdV$ , donde  $V \propto a^3$ , y  $V$  es un volumen solidario a la expansion con energia  $E = \rho V$  y entropia  $S = sV$ . Lo anterior puede ser escrito como sigue:

$$d\rho = (sT - \rho - P) \frac{dV}{V} + Tds \quad (43)$$

y como  $\rho$  depende solo de  $T$ , implica

$$s = \frac{(\rho + P)}{T} \quad (44)$$

Llegando entonces a

$$s \propto T^3 \propto n_\gamma \quad (45)$$

que nos dice que la entropia es medida mediante el numero de densidad de fotones. Como asumimos que estamos en un proceso isotropico, la entropia en un volumen solidario  $S = sa^3$  es constante, y por lo tanto  $T \propto g_{eff}/a$ , ignorando la pequeña variacion del prefactor se llega a  $T \propto 1/a$ .

Procediendo como antes, sustituimos (41) en (15) dando:

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} + k = \frac{C_2}{a^2} \quad (46)$$

siendo  $C_2$  una constante. Razonando como antes, para valores chicos de  $a$ ,  $k$  puede despreciarse. Entonces  $a$  crecera como:

$$a \propto t^{1/2} \quad (47)$$

como vemos, todavia se tiene una singularidad para  $t = 0$ .

### 0.3.4. Horizontes

Consideremos nuevamente el camino radial recorrido por un haz de luz. Este debe verificar:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 d\chi^2 = 0 \quad (48)$$

Si tenemos un rayo de luz enviado en  $t = 0$  desde  $\chi_H$  y recibido en  $\chi_0 = 0$  en el tiempo  $t$  vale:

$$\chi_H = \int_0^t \frac{cds}{a(s)} \quad (49)$$

La distancia física, el **horizonte**, como vimos viene dado por:

$$d_H(t) \equiv a(t)\chi_H = a(t) \int_0^t \frac{cds}{a(s)} \quad (50)$$

Este es el horizonte en tiempo  $t$ , o sea que uno puede ver hasta esta distancia y no mas alla. Recapitulando, en el Universo temprano uno encontraba que  $a(t) \propto t^{1/2}$ , sustituyendo esto en lo anterior encontramos que para el epoca en la que dominaba la radiacion el horizonte era:

$$d_H = 2ct \quad (51)$$

Podemos comparar el horizonte de particulas con el tamaño del Universo con el cociente:

$$\frac{d_H}{a} \propto \frac{t}{t^{1/2}} \propto t^{1/2} \quad (52)$$

tenemos entonces que el horizonte de particulas crece mas rapido que el Universo y por lo tanto podemos ver mas y mas alla en el Universo. Si consideramos ahora el Universo plano dominado por materia dicho horizonte crecera como  $3ct$ . Cual es el tamaño del horizonte de particulas hoy en dia?. Basta considerar lo ultimo y recordar que para un Universo plano dominado por materia se tenia  $H(t) = \frac{2}{3t}$

$$d_H(t_0) = 3ct = 3c \frac{2}{3H_0} = \frac{6 \times 10^3}{h} Mpc \quad (53)$$

### 0.3.5. Historia Termal, la relacion t-T

Nos ocuparemos ahora de encontrar una relacion entre la temperatura  $T$ , y el tiempo  $t$ . Durante el Hot Big Bang, los fotones y otras pariculas ultra relativistas se encontraban en equilibrio termodinamico a la misma temperatura y potencial quimico nulo. Consideremos nuevamente un Universo dominado por radiacion, donde como vimos teniamos:

- Relacion temperatura-factor de escala.

$$T \propto \frac{1}{a} \quad (54)$$

- Relacion tiempo-factor de escala

$$a \propto \sqrt{t} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \rho \quad (55)$$

- Densidad de energia para gas ultra relativista, fotones

$$u_\gamma = \rho_\gamma c^2 = \frac{4\sigma T^4}{c} = \frac{g_\gamma 4\sigma}{2c} T^4 \quad (56)$$

- Ahora considerando fermiones, su densidad de energia viene dada por:

$$u_{fer} = \frac{g_f 4\sigma}{2c} T^4 \quad (57)$$

- Siendo los factores de spin

$$g_\gamma = 2 \quad g_{e^-} = g_{e^+} = 7/4 \quad g_{\nu_e} = g_{\nu_\mu} = g_{\nu_\tau} = 7/8 \quad (58)$$

Siendo claro lo anterior tambien para los respetivos antineutrinos.  
Considerando la densidad de energia total  $u$  se tiene:

$$u = u_\gamma + \sum_{fer} u_f = \frac{g_\gamma + \sum_{fer} g_f}{2} \frac{4\sigma T^4}{c} \equiv \frac{g_{eff} 4\sigma}{2c} T^4 \quad (59)$$

Teniendo entonces:

$$u = \frac{g_{eff} 4\sigma}{2c} T^4 \quad (60)$$

Ingresando esta ultima relacion en la ecuacion 55 obtenemos la relacion  $t-T$ .

$$1/t = 2\sqrt{\frac{8\pi G u}{3c^2}} = 2\sqrt{\frac{8\pi G 4\sigma}{6c^2}} \sqrt{g_{eff}} T^2 \quad (61)$$

obteniendo entonces:

$$1/t = 3 \times 10^{-21} \sqrt{g_{eff}} T^2 \quad (62)$$

Tenemos entonces la relaciones necesarias como para poder dar una descripcion cualitativa de los primeros instantes del Universo:

$$t \leftrightarrow T \leftrightarrow kT$$

- $t \approx 10^{-2} s$ ,  $T \approx 10^{11} k$ ,  $kT \approx 10 MeV$
- Electrones y positrones en equilibrio

$$e^- + e^+ \rightleftharpoons \gamma + \gamma \quad e^- + e^+ \rightleftharpoons \nu^+ + \nu^-$$

- Protones y neutrones en equilibrio  
Calculemos aproximadamente las abundancias relativas para protones y neutrones.

$$\begin{aligned} \nu + n &\rightleftharpoons p + e^+ & e^+ + n &\rightleftharpoons p + \bar{\nu} & n &\rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu} \\ \mu(n) &= \mu(p) + \mu(e^-) + \mu(\bar{\nu}) & \mu(e^-) &\approx \mu(\bar{\nu}) \approx 0 & (UR) \\ m_n c^2 - kT \ln\left(\frac{2n_{Qn}}{n_n}\right) &= m_p c^2 - kT \ln\left(\frac{2n_{Qp}}{n_p}\right) & n_{Qn} &\propto n_{Qp} \\ \frac{n_n}{n_p} &= \exp\left(\frac{-(m_n - m_p)c^2}{kT}\right) \\ (m_n - m_p)c^2 &= 1,29 MeV \end{aligned}$$

- $t \approx 0,15$ ,  $T \approx 3 \times 10^{10} K$ ,  $kT \approx 3 MeV$   
 $\Gamma_{weak} < H$ . La tasa para las interacciones por fuerza debil pasan a ser menores que el tiempo de Hubble, por lo tanto los neutrinos se desacoplan del resto del Universo, todavia interactuando via la gravedad.
- $t \approx 1s$ ,  $T \approx 10^{10} K$ ,  $kT \approx 1,29 MeV$ . Esta energia no es suficiente para la creacion de neutrones.

$$\frac{n_n}{n_p} \approx 1/6$$

Este valor cambiara debido a que la vida media para los neutrones es  $10,06 \pm 0,2 \text{min}$ .

- $t \approx 10s$ ,  $T \approx 3 \times 10^9 K$ ,  $kT < m_e c^2$ . En esta etapa la energia promedio de los fotones es demasiado chica para crear pares por lo que la aniquilacion de los electrones con los positrones calentara el medio. Esto significa que habra un incremento en la temperatura del gas de fotones. Veamos cuanto crece esta temperatura. Considerando un volumen  $V$ , con energia  $E = \rho c^2 V$  con  $\rho = 4\sigma g_{eff} T^4 / 2c$  y una presion  $p = \rho c^2 / 3$ . La entropia sabemos que era proporcional a  $T^3$ , con  $S = sV$ . Mas especificamente siguiendo  $dE = -pdV - TdS$  se tiene

$$S = \frac{8\sigma c g_{eff} V T^3}{3} \quad (63)$$

Si suponemos que el volumen no cambia mucho durante el proceso de aniquilacion y que la entropia es conservada uno obtiene:

$$T_{despues} = T_{antes} \left( \frac{g_{antes}}{g_{despues}} \right)^{1/3} \quad (64)$$

El numero de grados de libertad antes corresponde a  $2 + 7/2 = 11/2$  y despues es 2. Debido a que los neutrinos se propagaban de igual forma que los fotones, ambos tendrian igual temperatura antes de la aniquilacion de pares. Uno obtiene entonces:

$$T_\gamma = \left( \frac{11}{4} \right)^{1/3} T_\nu \quad (65)$$

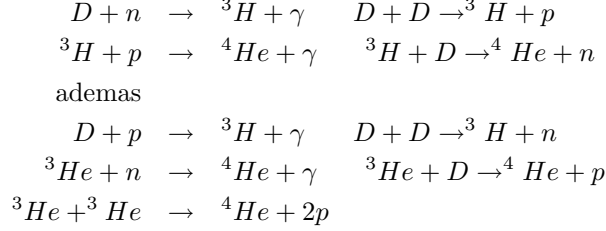
cabe notar que actualmente tenemos con gran precision la temperatura de la radiacion cosmica de fondo, pero la temperatura para los neutrinos  $T_\nu = 2,0K$  no ha sido medida todavia!

### 0.3.6. Nucleosintesis

Cuando se llega  $t \approx 100s$ ,  $T < 10^9 K$  y  $kT < 0,1 MeV$  el Universo se ha enfriado lo suficiente como que se lleve a cabo la creacion de elementos. La mayoria de los neutrones se agruparan en  ${}^4He$ . Consideremos ahora las siguientes reac-



ciones:



tambien se forma pequeñas fracciones de  ${}^7Li$ . Ahora si asumimos una abundancia relativa  $n(n)/n(p) \approx 1/7$ , podemos estimar la cantidad de  ${}^4He$  creado:

$$\frac{n({}^4He)}{n(H)} = \frac{n(n)/2}{n(p) - n(n)} = \frac{n(n)/2n(p)}{1 - n(n)/n(p)} = 1/12 \quad (66)$$

calculando la fraccion de masa entonces:

$$Y_4 = \frac{M_{{}^4He}}{M_{total}} = \frac{4n({}^4He)}{n(H) + 4n({}^4He)} = 0,25 \quad (67)$$

Con un poco mas de detalle vemos que  $Y_4$  depende de varios factores:

- (a) El numero de baryones por foton. El numero de fotones esta muy bien determinado gracias a la gran precision en la temperatura de la radiacion cosmica de fondo, pero la cantidad de energia que se encuentra en forma de materia no se conoce bien. Veamos el numero de baryones por foton:

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (68)$$

$$n_{B0} = \frac{\rho_{c0}}{m_B} = \frac{\Omega_{B0}\rho_{c0}}{m} \quad (69)$$

$$\text{siendo } \rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (70)$$

$$\text{con } H \approx 100h \Rightarrow n_{B0} = \frac{\Omega_{B0}3h^210^4}{8\pi Gm_H} \quad (71)$$

Considerando ahora el numero de fotones podremos calcular  $\eta$

$$n_{\gamma 0} = bT_0^3 \quad T_0 = 2,725K \quad (72)$$

$$\eta = \frac{n_{B0}}{n_{\gamma 0}} = 2,68 \times 10^{-8} \Omega_{B0} h^2 \quad (73)$$

Observacionalmente se tiene:

$$0,016 < \Omega_{B0} h^2 < 0,024$$

$$0,026 < \Omega_{B0} < 0,053$$

WMAP:  $\Omega_{B0} = 0,044 \pm 0,002$

- (b) El tiempo de vida media del neutron:  $10,6 \pm 0,2 \text{ min}$ .
- (c) La cantidad de tipos de neutrinos. De experimentos se prueba de la existencia de solo 3 tipos de neutrinos.

## Materia Barionica y Nucleosintesis

La Nucleosintesis provee el mejor estimativo de la densidad barionica. A pesar de que los calculos teoricos han sido muy bien desarrollados, la informacion recolectada de la observacion precisa considerable interpretacion.

En consecuencia, mientras que la teoria de la nucleosintesis es uno de los grandes triunfos de la cosmologia, los limites para densidad barionica no estan muy bien definidos. Un ejemplo clasico(Copi et al. 1995a,b) muestra:

$$0,010 \leq \Omega_b h^2 \leq 0,022 \quad (74)$$

inclusively se han obtenido valores mayores. Cuando nos referimos al valor de  $\Omega_b$  en la nucleosintesis hacemos referencia al valor central de los valores de Copi et al.

$$\Omega_b^{nuc} h^2 = 0,016 \quad (75)$$

Observaciones(Tyler et al. 1996) de las abundancias de deuterio en sistemas de absorcion de quasares sugieren que el valor verdadero estara cerca de la cota maxima o aun mas alla de esta.

La razon  $\Omega_b/\Omega_0$  puede ser estimada al observar cumulos de galaxias. Originalmente titulada "la catastrofe barionica," hoy en dia recibe el nombre no tan emotivo de "fraccion barionica de cumulos". La mayoria de la materia barionica en los cumulos tiende a estar en la forma de gas caliente emitiendo en rayos X, distribucion la cual puede ser usada para estimar la masa total del cumulo a partir de la condicion de equilibrio hidrostatico, claro que con incertidumbres presentes. Como los cumulos son objetos muy vastos, se espera que el balance del material en estos sea una muestra fiel del contenido presente en el Universo. White y Fabian(1995) compilando observaciones de 13 cumulos obtuvieron una fraccion barionica de :

$$\frac{\Omega_b}{\Omega_0} = 0,14^{+0,08}_{-0,04} \left( \frac{h}{0,5} \right)^{-3/2}$$

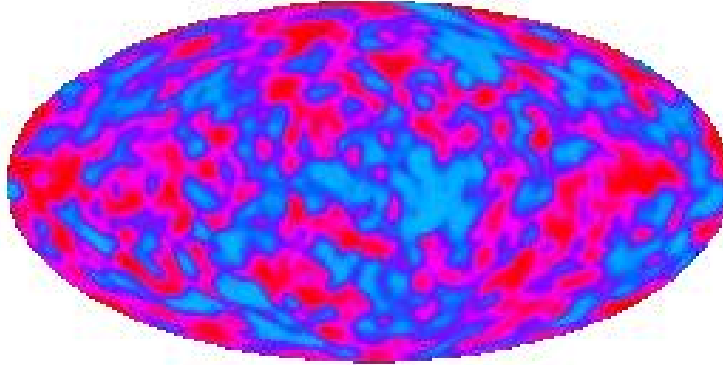
dentro de un 95 porciento.

Considerando el valor de  $\Omega_b$  en la nucleosintesis, esto implica que el Universo tiene una baja densidad, quizas alrededor de 0.4.

La fraccion barionica obtenida por estos medios es inconsistente con los valores arrojados por la nucleosintesis, dejando la puerta abierta a diversas especulaciones sobre la teoria o la interpretacion de las observaciones. De todo lo anterior, si nos encontramos cerca de la densidad critica, entonces una gran cantidad substancial de la masa se encontrara en otra forma aparte de la barionica.

### 0.3.7. Radiacion Cosmica de Fondo (CMB)

El Universo se vuelve transparente para la luz cuando los fotones no tienen la energia suficiente como para excitar o ionizar el hidrogeno. Esta es la epoca de la **Recombinacion**. Esto ocurre cuando la temperatura alcanza aproximadamente los  $4000K$  correspondiente a una energia para los fotones de  $0,3eV$ . Sabemos que la energia de ionizacion es de  $13,6eV$ , pero debido a que el numero de fotones supera ampliamente al de atomos de hidrogeno, encontraremos fotones suficientes como para ionizar a temperaturas mayores de  $4000K$ . Antes de la



ht

Figura 2: Imagen del satellite COBE

**recombinacion**, tenemos atomos de hidrogeno en equilibrio termodinamico con los fotones. Considerando el potencial quimico:

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H$$

obtenemos entonces:

$$\frac{n_p^2}{n_H} = \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp(-\epsilon_I/kT) \quad (76)$$

para las concentraciones en equilibrio. Asumiendo que toda la materia se encuentra en forma de hidrogeno, las concentraciones de hidrogeno ionizado y neutro son respectivamente:

$$n_p = x \frac{\rho_B}{m_p} \quad n_H = (1-x) \frac{\rho_B}{m_p} \quad (77)$$

siendo  $x$  la fraccion de hidrogeno ionizado.

Asumiendo que esta etapa corresponde al un Universo dominado por materia<sup>3</sup>, hacemos uso de la relacion  $\rho a^3 = constante$  y que  $T \propto 1/a$ . Entonces se tiene:

$$\rho_B = \rho_{B0} \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^3 = \rho_{B0} \left( \frac{T}{T_0} \right)^3$$

sustituyendo esto y reescribiendo la ecuacion de Saha se obtiene:

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{T_0^3 m_e}{\rho_{B0}} \left( \frac{2\pi m_e k}{h^2} \right)^{3/2} T^{-3/2} \exp(-\epsilon_I/kT) \quad (78)$$

Con esto y los valores actuales para  $\rho_{B0}$ ,  $T_0$  y  $\rho_{c0}$  podemos ver como evoluciona la fracciones de hidrogeno ionizado con la temperatura, ademas de tener un

<sup>3</sup>Cosa que no es absurda ya que se puede probar que el Universo se vuelve dominado por materia mucho antes que esta epoca

valor aproximado de cuando ocurrio la **recombinacion**.

$$\begin{aligned}
T &= 4500K & x &\approx 1 \\
T &= 4000K & x &\approx 0,88 \\
T &= 3700K & x &\approx 0,5 \\
T &= 3500K & x &\approx 0,16 \\
T &= 3000K & x &\approx 0,0045
\end{aligned}$$

Recordando las relaciones  $z+1 = a_0/a_t$  y  $T \propto 1/a$ , esta ultima para un Universo dominado por materia y asumiendo  $\Lambda = 0$  se tiene:

$$\begin{aligned}
T = 3700K \quad z + 1 = 1360 \quad a \propto t^{3/2} \implies t = t_0(z + 1)^{-3/2} \approx 2 \times 10^5 y \quad (79) \\
t \approx 2 \times 10^5 y
\end{aligned}$$

Para  $T = 3000K$ ,  $z + 1 = 1100$  se tiene  $t \approx 2,7 \times 10^5 y$

Mas preciso incluyendo  $\Lambda \neq 0$  se tiene  $t_{dec} = 3,79 \times 10^5$ .

Esta radiacion que se libera es la **conocida radiacion cosmica de fondo**, desde el momento en que se desacopla de materia ha disminuido su temperatura siendo hoy de  $2,74K$ . Es sorprendente lo isotropica que es esta temperatura. El tamaño del horizonte en el momento de la **recombinacion** viene de la formula (51), que es de aproximadente  $100Kpc$ . Esa distancia es en la actualidad:

$$\frac{a_0}{a_{rec}} d_{H,rec} = \frac{T_{rec}}{T_0} d_{H,rec} \approx \frac{4000}{2,7} \times 100 \approx 150 Mpc \quad (80)$$

y corresponde a un angulo de un grado en la esfera celeste. Todavia sorprende que la radiacion sea tan isotropica. Ademas, desde que la materia se encuentra agrupada en cumulos uno esperaria encontrar fluctuaciones en la radiacion de fondo debido a la interaccion entre radiacion y materia. Si suponemos que la materia colapsa en forma adiabatica uno esperaria un aumento en la temperatura, y dichos procesos pueden suceder en distancias angulares menores al horizonte. La informacion puede ser analizada expandiendo la funcion temperatura en armonicos esfericos

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (81)$$

en donde los coeficientes vienen determinados estadisticamente. Si las fluctuaciones son Gaussianas<sup>4</sup> toda la informacion es obtenida de  $C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle$ . De estos uno puede calcular el valor rms de la diferencia en tempearatura de dos puntos separados por un angulo  $\theta$  como:

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T} \right\rangle_\theta \approx \sqrt{\frac{l(l+1)C_l}{2\pi}} \quad (82)$$

Diferentes momentos multipolares corresponden a diferentes separaciones angulares y la relacion viene dada aproximadamente por  $\theta \approx \frac{180}{l}$ . El escenario

<sup>4</sup>Esto significa en pocas palabras que sus componentes de Fourier no esten correlacionadas.

inflacionario predice fluctuaciones en densidad que influyen la radiacion cosmica de fondo. Recordando que el horizonte al momento del desacople era de cerca de 1 grado, correspondiendo a un  $l$  de 200 aproximadamente. Esto significa que regiones de menos de 1 grado fueron influenciadas por procesos microfisicos. Calculos mas detallados del espectro predicho por la inflacion dan un pico mayor en el rms de la ecuacion anterior con  $l \approx 200$  y menores picos para valores mayores de  $l$ . Los experimentos Boomerang y Maxima verifican esto. Es mas, estos son tan detallados que pueden dar idea de la geometria del Universo. Si la geometria del Universo es plana, la luz habra viajado siguiendo lineas rectas, y el angulo medido ( $l$ ) correspondera con el verdadero tamaño del horizonte al momento del desacople. De tener una geometria curva, las escalas angulares medidas seran diferentes a las "verdaderas". Segun el Boomerang se tiene:

$$l_{pico} = 197 \pm 6 \text{ y } \Omega_{total} = 1,06 \pm 0,06$$

Estos valores junto con la determinacion de la constante de Hubble y el parametro de desaceleracion sugieren que vivimos en un Universo plano con  $\Omega_{\Lambda} = 0,7$  y  $\Omega_m = 0,3$ .

## 0.4. Inflacion

### 0.4.1. Motivacion para la Inflacion

Por lejos, la propiedad mas importante de la inflacion es que permite generar irregularidades en el Universo, lo que llevaria a la generacion de estructuras. A pesar de esto, las motivaciones historicas de la inflacion fueron un poco distintas, y nacieron con el fin de encontrar respuestas al problema de las condiciones iniciales del Hot Big Bang. Veamos una reseña de los problemas que no pueden ser explicados por la teoria de Hot Big Bang.

### 0.4.2. El problema de la chatura

Como vimos anteriormente, la ecuacion de Friedman puede ser escrita en funcion del parametro de densidad  $\Omega$ . Ignorando la constante cosmologica o incluyendola si uno prefiere en  $\Omega$  la ecuacion es:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (83)$$

Si el Universo es plano ( $\Omega = 1$ ), entonces sera asi por siempre, de otra forma  $\Omega$  evolucionaria con el tiempo.

El problema de la chatura es simplemente que durante la epoca de dominacion de la radiacion o materia, el producto  $aH$  es una funcion decreciente en el tiempo. Teniamos por ejemplo para un Universo dominado por materia cuasi plano la relacion  $|\Omega - 1| \propto t^{2/3}$  mientras que para un Universo de igual geometria con radiacion valia  $|\Omega - 1| \propto t$  Sabemos de mediciones recientes que  $\Omega_0$  no difiere mucho de la unidad, sabemos que no es mayor en un orden de magnitud, lo que implica que debio de estar mucho mas proximo a uno en el pasado. Para obtener el actual Universo, durante la nucleosintesis, cuando el Universo tenia aproximadamente 1s, debio de haber valido:

$$|\Omega(t_{nuc}) - 1| \leq 10^{-16} \quad (84)$$

y en tiempo anteriores debio de estar todavia mas cerca de uno. El problema nos indica que un ajuste tan fino de las condiciones iniciales parece extremadamente poco comun. Casi todas las condiciones iniciales llevan a un Universo cerrado que colapsa casi inmediatamente, o a un Universo abierto que rapidamente entra en un regimen dominado por la curvatura y que se enfria por debajo de los  $3K$  dentro del primer segundo de su existencia. Por esto el problema de la chatura se le asocia el nombre del problema de la edad. Como logro ser el Universo tan viejo? En figura 2 es sorprendente el distinto comportamiento

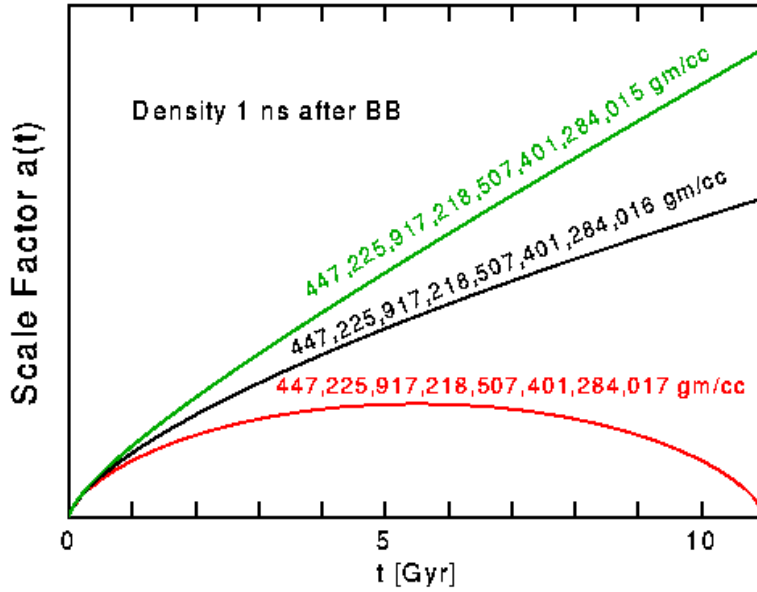


Figura 3: Precision de las Condiciones Iniciales

que habria de tener el Universo debido a cambios "microscopicos" en los valores para su densidad.

#### 0.4.3. Problema del Horizonte

Hemos visto que en el modelo del Hot Big Bang, la comoving distance<sup>en</sup> la cual tenemos interacciones causales antes de que la radiacion de fondo fuese liberada era de  $180\Omega_0^{1/2}h^{-1}Mpc$ , que es considerablemente menor que la distancia(no fisica) que la radiacion viaja luego de desacoplarse,  $5820h^{-1}Mpc$  en un Universo plano. Esto es la distancia recorrida por la radiacion desde aproximadamente el origen del Universo, pero entonces al observar en direcciones opuestas tenemos regiones disconexas causalmente pero poseen una temperatura casi identica. Tenemos entonces que el modelo del Hot Big Bang no encuentra respuestas sobre la gran homogeneidad de la radiacion cosmica de fondo, por lo que la homogeneidad debiera ser parte de las condiciones iniciales. El diagrama presentado como figura 3 ha sido exagerado tomando el redshift al momento de la **recombinacion** igual a  $z + 1 = 144^5$ . En este diagrama la linea horizontal inferior de color azul representa el tiempo de la **recombinacion**, y se

<sup>5</sup> $z + 1 \approx 1100$  para la **recombinacion**

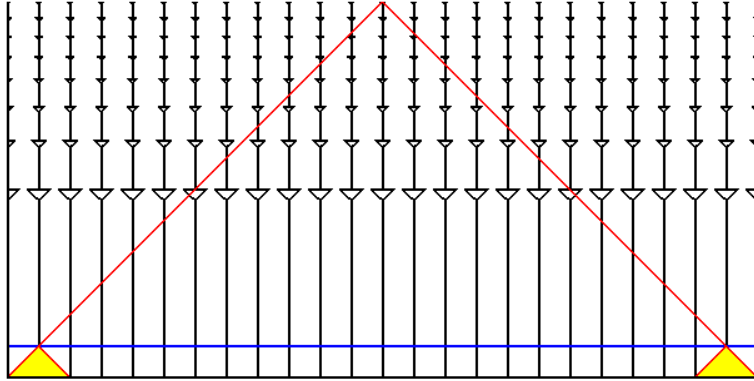


Figura 4: Diagrama espacio-tiempo conforme

han marcado dos conos de luz amarillos para el pasado de dos puntos en dicha region. Estos puntos estan desconectados causalmente, pero su temperatura difiere en una parte en 100,000. Como estas regiones llegaron a tener casi la misma temperatura?. Este es el problema del horizonte.

#### 0.4.4. Reliquias No Deseadas

Si el Hot Big Bang comenzo a una temperatura muy alta, reliquias prohibidas por la observacion hubiesen sobrevivido hasta el presente. Una de las principales reliquias es el gravitino. Esta es una partícula de spin  $3/2$  que aparece en teorías de supergravedad e interactura solo mediante las fuerzas de gravedad y fuerte. En la mayoría de las teorías de supergravedad, la masa del gravitino es del orden de  $100 GeV$  y en cuyo caso se vería modificada la nucleosíntesis si el modelo del Hot Big Bang comenzase antes de  $T \approx 10^9 GeV$

Otro problema relaciona a la partículas de spin 0 que ocurren en teoría de cuerdas, o moduli. Correspondientes a los campos que parametrizan el vacío en la ausencia de ruptura de supersimetría. Sus masas y vidas medias son del orden del gravitino pero al estar asociados con campos escalares, es más probable que hayan sido producidas en gran cantidad en los primeros momentos del Universo. Mas problemas surgen relacionados a defectos topológicos y a la aparición de monopolos magnéticos, dando una abundancia mayor a la observada. Históricamente la necesidad de librarse de los monopolos magnéticos era una de las grandes motivaciones para una teoría inflacionaria.

#### 0.4.5. Definición de Inflación

La teoría inflacionaria (Guth 1981; Albrecht y Steinhardt 1982; Linde 1982, 1983) no es un remplazo para el modelo del Hot Big Bang, sino un agregado al modelo que ocurre en una época muy temprana sin modificar los logros alcanzados por el mismo.

La definición de inflación es simplemente una época durante la cual el factor de escala del Universo se acelera:

$$\text{Inflacion} \iff \ddot{a} > 0 \tag{85}$$

La inflacion a veces se describe como una rapida expansion, pero no es claro respecto a que la expansion se supone que es rapida. Hay una definicion alternativa para la condicion de inflacion que no permite una interpretacion fisica.

$$\text{Inflacion} \iff \frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0 \quad (86)$$

Debido a que  $H^{-1}/a$  es la longitud de Hubble, la condicion de inflacion nos dice que la longitud de Hubble, que es la escala mas importante en un Universo en expansion, es decreciente en el tiempo. Visto en coordenadas fijas a la expansion, el Universo observable se vuelve mas *chico* durante el inflacion debido a que la escala caracteristica ocupa una menor region de coordenadas a medida que el tiempo avanza.

Si la inflacion ocurre, entonces es posible afrontar los problemas mencionados para el modelo del Big Bang.

Respecto al problema de la chatura, una de las condiciones para la inflacion es precisamente la condicion para que  $\Omega$  sea llevado a 1 en vez de que alejarse de este valor. Las abundancias relativas para los obeitos exoticos nos observados puede ser reducida satisfactoriamente por la expansion durante la inflacion, asumiendo que estas particulas fueron creadas antes de que comenzase la inflacion.

El problema del horizonte puede ser resuelto debido a la dramatica reduccion en la distancia de Hubble durante la inflacion, lo cual permite al Universo observable haber sido generado en una pequena region que estaba dentro del radio de Hubble en el momento temprano de la inflacion. En otras palabras, las regiones que observamos hoy como regiones disconexas, estaban conectadas causalmente antes de la inflacion, lo que permite abordar el problema de la homogeneidad, mientras que al disminuir el tamaño de nuestro Universo observable, las inhomogeneidades han sido alejadas a escalas mucho mayores. En la figura 5 se marca

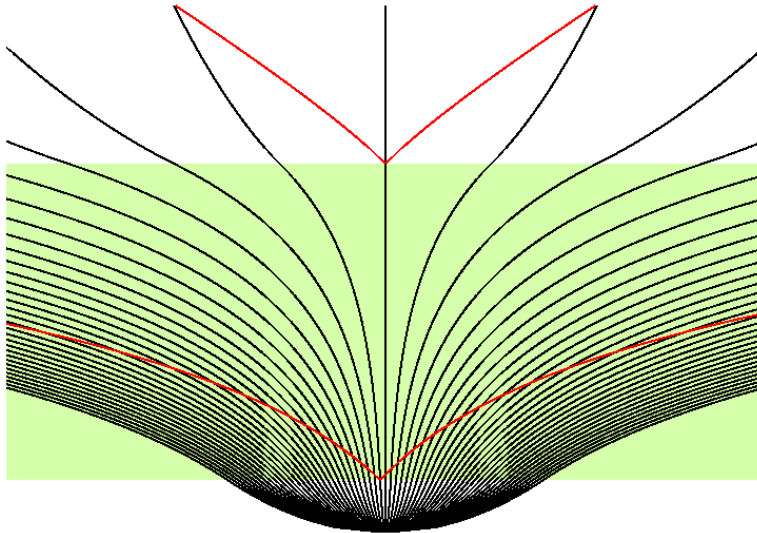


Figura 5: Diagrama spacio-tiempo en periodo inflacionario

en verde la region correspondiente al periodo inflacionario. Notar como un cono



de luz en el presente solo puede observar una estrecha region en el pasado al momento de la inflacion.

Puede ser didactico observar un diagrama de como las fluctuaciones evolucionan al momento de la inflacion y como luego podemos tener un patron para la radiacion cosmica de fondo. En esta figura tenemos a la derecha como pudieron

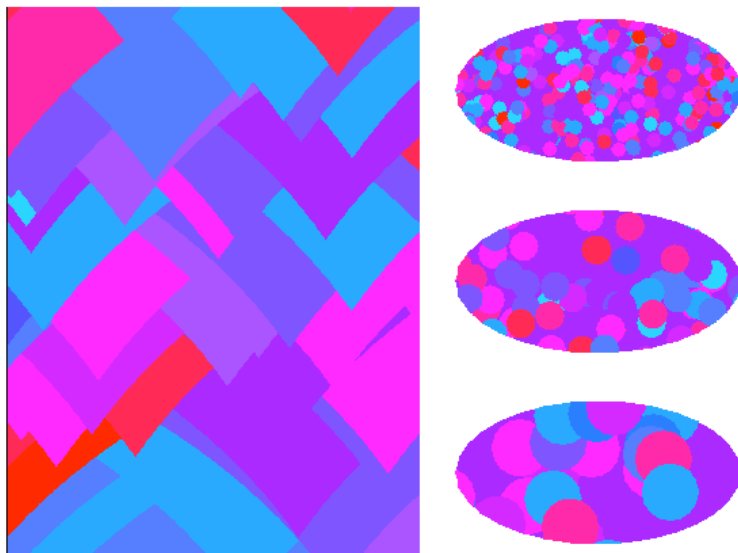


Figura 6: Diagrama espacio tiempo de fluctuaciones cuanticas(izq), evolucion de horizontes(der)

interactuar causalmente regiones gracias a la inflacion. Luego de haber terminado ese periodo, los horizontes son mas pequenos dando una cobertura similar del cielo.

#### 0.4.6. Campos Escalares en Cosmologia

Para obtener un proceso inflacionario, uno debe contar con un material que tenga la peculiar propiedad de poseer presion negativa. Tales objetos son los campos escalares, o particulas con spin 0. Aunque no se han observado todavia dichos objetos, son comunes en la fisica de particulas desde hace ya unos cuantos años. Juegan un papel fundamental en permitir la ruptura de simetria entre las fuerzas fundamentales. Estos campos poseen la propiedad de tener una energia potencial con un redshift extremadamente lento a medida que el Universo se expande. Siendo esto ultimo correspondiente a una ecuacion de estado con una presion negativa. Los campos escalares responsables de la inflacion a veces son llamados **inflaton**.

La forma mas comun para especificar una teoria es a traves de su Lagrangiano, del cual se derivaran las ecuaciones de movimiento. Como punto de partida, adoptaremos las expresiones para la densidad de energia y presion de un campo

escalar homogéneo que depende del tiempo  $\phi \equiv \phi(t)$  como las siguientes:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (87)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (88)$$

siendo el término  $V(\phi)$  el **potencial** del campo escalar, el cual uno esperaría derivar de alguna motivación de física de partículas. Distintos modelos de inflación corresponden a distintas elecciones del potencial.

Las ecuaciones de movimiento pueden ser derivadas directamente sustituyendo estas relaciones en la ecuación de Friedmann y en la ecuación de continuidad. Si asumimos un Universo plano obtenemos:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left( V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right) \quad (89)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (90)$$

siendo la última ecuación llamada la ecuación de onda escalar.<sup>6</sup> De las formas de la energía y presión, la condición para la inflación es satisfecha mientras  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$  (Es decir una presión negativa).

Una vez comenzada la inflación, el término de la curvatura en la ecuación de Friedmann se hace menos importante al pasar el tiempo, normalmente se le asume despreciable desde un principio, si no es así, las primeras etapas de la inflación lo llevarán a ser ignorable.

#### 0.4.7. Aproximación Estándar a la Inflación: Slow-Roll Inflation

Como dice el título, exploremos una técnica de aproximación conocida como técnica de desarrollo lento o *slow-roll*. En esta aproximación tiramos el último término en la ecuación (89) y el primero de la ecuación (90) dejando:

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_{Pl}^2} \quad (91)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \quad (92)$$

donde las primas son las derivadas respecto del campo escalar  $\phi$  y  $\simeq$  representa la igualdad dentro de esta aproximación. Para que esta aproximación sea válida, deben de cumplirse dos condiciones, estas son:

$$\epsilon(\phi) \ll 1 \quad |\eta(\phi)| \ll 1 \quad (93)$$

siendo estos los parámetros de desarrollo lento o **slow-roll parameters**, siendo  $\epsilon$  y  $\eta$  definimos como (Liddle y Lyth 1992, 1993a):

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{Pl}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \quad (94)$$

$$\eta(\phi) = M_{Pl}^2 \frac{V''}{V} \quad (95)$$

<sup>6</sup>Recordar el cambio de unidades,  $c = 1$  y la definición de la masa reducida de Planck  $M_{Pl}$

Notar que  $\epsilon$  es positivo por definicion. Estas condiciones pueden ser verificadas por sustitucion. Notar ademas que estas condiciones son necesarias pero no suficientes para la aproximacion debido a que estas restringen la forma del potencial. Practicamente todo lo que se precisa viene de las ecuaciones (89) y (90) refiriendonos a estas como las **condiciones para el desarrollo lento** o *slow-roll conditions*. En particular la ecuacion (88) es una consecuencia de las ecuacion (89) y  $\epsilon \ll 1$ .

Estos parametros muestran donde la inflacion puede ocurrir a partir de un potencial dado. Por ejemplo si se tiene  $V(\phi) = m^2\phi^2/2$ , estos son satisfechos pidiendo  $\phi^2 > 2M_{Pl}^2$ . (ver condicion para  $\epsilon$ ). Una vez alcanzado el minimo para la validez de estas condiciones la inflacion llegara a su fin.

#### 0.4.8. Relaciones entre inflacion y el desarrollo lento

Veamos por que la aproximacion para de un desarrollo lento es una condicion suficiente para la inflacion. Reescribiendo la ecuacion para la inflacion:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H}^2 + H^2 > 0 \quad (96)$$

cosa que sera satisfecha si  $\dot{H} > 0$ .<sup>7</sup> O viendolo como:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \quad (97)$$

mientras que sustituyendo, las ecuaciones para el desarrollo lento nos dicen:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{M_{Pl}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 = \epsilon \quad (98)$$

y siendo la aproximacion valida ( $\epsilon \ll 1$ ), por lo tanto la **inflacion esta garantida!**

Un modelo de la inflacion esta definido por un potencial y una manera o condicion para que se la inflacion termine. Una forma para que la inflacion termine es por la violacion de las condiciones para un lento desarrollo (**slow-roll conditions**) a medida que el campo alcanza un minimo con energia potencial despreciable o zero. En tales casos puede asumirse que la inflacion llegara a termino cuando  $\epsilon(\phi)$  se acerca a la unidad.

#### 0.4.9. Cantidad de Inflacion

Normalmente, la cantidad de inflacion que ocurre es cuantificada con la razon entre el factor de escala al tiempo final con su valor en cierto tiempo inicial. Como sucede que este cociente es muy grande, se toma el logaritmo natural de dicho cociente especificando el numero de **e-foldings N**:

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} \quad (99)$$

<sup>7</sup>Esto requerira  $P < -\rho$  en RG y por lo tanto no podra ser causado por un campo escalar, aunque podra ocurrir en otras teorias extendidas de la gravedad.

donde  $t_{end}$  es el tiempo donde termina la inflacion. Esto mide la cantidad de inflacion en un intervalo de tiempo con  $N$  decreciendo a 0 al final de la inflacion. Para resolver el problema de la çaturaz de horizonte, unos setenta  $e - foldings$  de inflacion son necesarios. Como vimos antes, una buena caracterizacion para la inflacion es cuando la longitud de Hubble  $1/aH$  es decreciente. Entonces hay una forma alternativa de cuantificar la cantidad de inflacion, que es tomando el cociente entre la distancia de Hubble inicial y la final.

$$\tilde{N} = \ln \left( \frac{a(t_{end})H_{end}}{a(t)H(t)} \right) \quad (100)$$

aunque tecnicamente mas precisa,  $a(t)$  cambia dramaticamente mas rapido que  $H$ , por lo que la diferencia no sera muy importante. Para muchos propositos seria lindo saber que cantidad de inflacion puede ocurrir dado un valor del potencial escalar  $\phi$  en vez de pensarlo para un tiempo  $t$ :

$$N \equiv \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = \int_t^{t_{end}} H dt \simeq \frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{V}{V'} d\phi \quad (101)$$

donde  $\phi_{end}$  se define con  $\epsilon(\phi_{end}) = 1$  si la inflacion termina cuando ya no son validos las condiciones de lento desarrollo.

#### 0.4.10. Soluciones exactas

Normalmente las condiciones para un lento desarrollo funcionan bastante bien en la mayoria de los modelos inflacionarios, pero presentan problemas a la hora del termino de la inflacion dando algunos errores en la cantidad de  $e-foldings$ . La solucion exacta que sobresale mas es la **inflacion de ley de potencia** (Lucchin y Matarrese 1985). (*power law inflation*). Rapidamente veamos algunas soluciones exactas encontradas para modelos inflacionarios. Este tipo de solucion aparece al considerar un potencial de la forma:

$$V(\phi) = V_0 \exp \left( -\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right) \quad (102)$$

siendo  $V_0$  y  $p$  constantes. Para el caso plano las ecuaciones de movimiento tienen la solucion particular:

$$a = a_0 t^p \quad (103)$$

$$\frac{\phi}{M_{Pl}} = \sqrt{2p} \ln \left( \sqrt{\frac{V_0}{p(3p-1)}} \frac{t}{M_{Pl}} \right) \quad (104)$$

$$\text{con los parametros } \epsilon = \eta/2 = 1/p \quad p > 1 \text{ cond. de inflacion} \quad (105)$$

Tomando  $p > 1$ , esta solucion verifica la condicion para la inflacion. En este modelo no hay fin para la inflacion

Otra solucion exacta puede ser obtenida tratando de encontrar un potencial necesario como para verificarla. Queremos una solucion con cierta forma y averiguamos que potencial  $V(\phi)$  la permite. La solucion mas investigada es la

solucion del modelo de **inflacion intermedia** (Barrow 1990, Muslinov 1990). La cual da la siguiente expansion:

$$a(t) \propto \exp(At^f) \quad 0 < f < 1 \quad A > 0 \quad (106)$$

$$\text{de un potencial } V(\phi) \propto \left(\frac{\phi}{M_{Pl}}\right)^{-\beta} \left(1 - \frac{\beta^2 M_{Pl}^2}{6\phi^2}\right) \quad (107)$$

en donde  $\beta = 4(f^{-1} - 1)$ . Tenemos una expansion mas rapida que una ley de potencia pero menor que un crecimiento exponencial. Como en el modelo anterior, no hay un fin natural para la inflacion en este modelo

## 0.5. Estructuras

### 0.5.1. Ideas generales

Se supone que las estructuras tienden a formarse a partir del colapso por mecanismos gravitacionales de regiones de mayor densidad. Significando que las perturbaciones en densidad deben de producirse de alguna manera. Las perturbaciones en densidad crecieran mediante la accion de la fuerza gravitatoria. Durante la epoca en la cual el Universo estaba dominado por la radiacion, las perturbaciones fueron removidas debido a la gran presion dominante. No obstante, en el periodo dominado por materia, uno encuentra en perturbaciones de los modelos del Big Bang que las perturbaciones en la densidad crecen como:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = a(t) \quad \delta\rho/\rho < 1 \quad \frac{\delta\rho}{\rho} = a^n(t) \quad (n \geq 3) \quad \delta\rho/\rho > 1 \quad (108)$$

Hoy en dia vemos estructuras con densidades mayores que la densidad promedio del Universo. Desde el momento de la **recombinacion** el factor de escala ha crecido por un factor de 1000. Por lo tanto las perturbaciones deben de haber sido del orden de 0,001 de las actuales en ese momento. Pero nos topamos con un problema, ya esperaríamos encontrar fluctuaciones similares, del mismo orden, en la temperatura de la radiacion cosmica de fondo.

El problema podria ser resuelto si existe otro tipo de materia que interactuase muy debilmente con la radiacion, la llamada materia oscura. Esta materia deberia ser todavia una fuente de gravedad. Perturbaciones en la densidad de materia oscura no producirian fluctuaciones tan grandes en la temperatura. Quizas podria empezar a formarse perturbaciones en la densidad de la materia oscura antes que las densidades en la materia ordinaria debido a la poca interaccion entre la radiacion y la materia oscura.

La materia oscura se divide en materia oscura **fria** y materia oscura **caliente**. La materia oscura fria es considerada toda materia con movimiento aleatorio nulo por lo menos a lo que respecta a la formacion de estructuras. Mas presisamente con velocidades aleatorias no relativistas en lo que respecta a toda escala cosmologica, en particular al horizonte. Candidatos para la materia oscura fria no faltan, siendo las mas populares las particulas mas livianas de teorias de supersimetria hasta objetos mas masivos como agujeros negros primordiales.

En el otro extremo esta la materia oscura caliente la cual es todavia ultra relativista en las escalas correspondientes a galaxias dentro del horizonte. Esta materia seria mas dificil de colapsar para permitir la formacion de estructuras

siendo el candidato mas votado los neutrinos con masa. Los efectos de perturbaciones del potencial gravitatorio en la radiacion cosmica de fondo fueron derivadas por Sachs and Wolfe(1967,Apj,147,73). El potencial  $\phi = -GM/r$  sera negativo en regiones densas mientras que sera positivo en regiones de menor densidad. Los fotones perderan energia al .escalar. esas regiones del potencial asociadas a una region densa.

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\phi}{c^2} \quad (109)$$

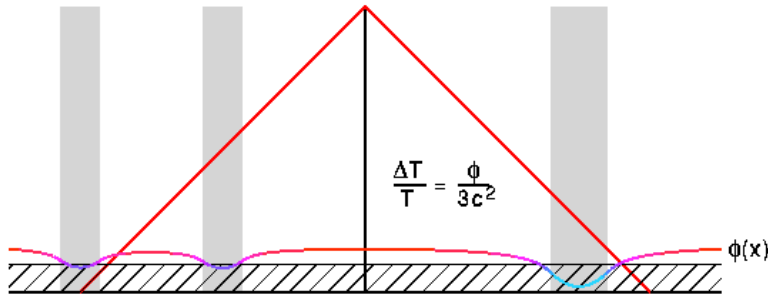


Figura 7: Diagrama espacio-tiempo conforme con el potencial  $\phi$

Sachs and Wolfe predijeron fluctuaciones en la temperatura del orden del 1 por ciento, pero actualmente sabemos que el universo es mucho mas homogéneo. En la region rayada se considera en Universo antes de la recombinacion. Las barras grises corresponden a regiones de mayor densidad. Como vimos antes, los patrones observados en las imagenes de la radiacion cosmica de fondo obtenidas por el satellite COBE pueden ser interpretadas como sigue: regiones que en un pasado estaban muy proximas entre si, conectadas causalmente, que en un periodo inflacionario fueron expandidas rapidamente. Luego al finalizar la epoca inflacionaria, la suma de todos los eventos causales en regiones de escalas angulares menores al grado, comenzaron a sumarse dando una descripcion que coincide con la de los patrones observados actualmente.

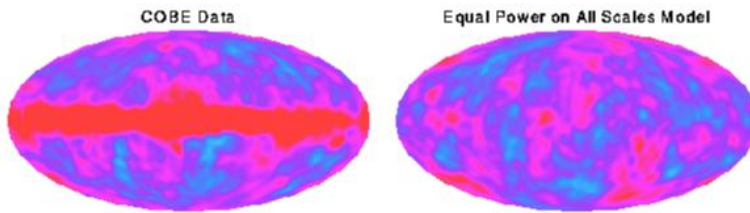


Figura 8: Comparacion de una imagen del satellite COBE con la referente a .equal power on all scales"

## 0.5.2. El modelo mas simple para el origen de estructuras(Revisando las Ideas Generales)

Hasta ahora hemos visto como la inflacion puede generar un Universo plano y homogeneo, a partir de un amplio rango de condiciones iniciales. a traves de la evolucion clasica de un Universo dominado por el campo escalar generador de tal inflacion. El verdadero merito de un modelo inflacionario es que provee una teoria para las inhomogeneidades en el Universo, las cuales pueden dar cuenta de las estructuras observadas en la actualidad. Estas inhomogeneidades nacen a partir de las fluctuaciones cuanticas en el campo **inflaton** en su estado de vacio, es decir por las fluctuaciones en el vacio.

Las fluctuaciones del vacio generan una perturbacion primordial en la densidad, del tipo conocido en cosmologia como *Gaussianas* y *adiabatica*, y cuyo indice espectral es cercano a 1. Tal perturbacion primordial puede tener origen antes o despues del comienzo del periodo inflacionario y sera el primer candidato para el origen de las estructuras a gran escala y la radiacion cosmica de fondo.

Para entender la evolucion de la perturbacion primordial en la densidad hasta el presente, debemos saber la naturaleza y cantidad de materia oscura no barionica, asi como tambien un valor de la constante cosmologica. La posibilidad mas simple seria tener una constante cosmologica nula y materia oscura fria no barionica dando una densidad critica. Este resultado puede ser considerado como el modelo mas simple para el origen de las estructuras a gran escala y de la radiacion cosmica de fondo. Este modelo es llamado **Modelo de Materia Oscura Fria** o **CDM Model**(Peebles 1982; Blumenthal et al. 1984; Davis et al. 1985, 1992a)

Considerando el origen inflacionario, nos ocuparemos a esta altura con listar las caracteristicas de la inflacion que daria origen al modelo mas simple:

1. *Mientras las escalas cosmologias de interes estan dejando el horizonte, hay una inflacion de lento desarrollo o **slow-roll inflation**. El campo inflaton en estas escalas empieza en el estado de vacio<sup>8</sup>, y su fluctuacion de vacio tiene una interaccion despreciable con este y otros campos. Esto lleva a una perturbacion Gaussiana adiabatica, con un indice espectral que vale casi 1.*
2. *El campo de inflacion tiene una sola componente. Esto asegura que la perturbacion en la curvatura espacial es constante bien fuera del horizonte, llevando asi a predicciones estandar para el espectro y el indice espectral.*
3. *Las fluctuaciones de vacio de otros campos ajenos al campo inflacionario no tienen ningun efecto significativo luego de la inflacion. Esto implica que la perturbacion en densidad adiabatica no esta acompañada por una perturbacion de isocurvatura en densidad.*
4. *Las ondas gravitacionales generadas como una fluctuacion de vacio no tienen efecto significativo en la anisotropia de la radiacion cosmica de fondo.*
5. *La materia oscura no barionica es fria, el Universo tiene densidad critica y no hay constante cosmologica. Esto afirma nuevamente nuestra consid-*

---

<sup>8</sup>No hay particulas del campo con el correspondiente momento

eracion del Universo luego de la inflacion, que fija la evolucion de las perturbaciones una vez que  $H_0$  y  $\Omega_b$  son especificados.

### 0.5.3. Fluctuacion de Vacio

Consideraremos las fluctuaciones de vacio del campo  $\phi$  como  $\delta\phi$ . Sera util un desarrollo de Fourier en una caja solidaria a la expansion con lados de longitud  $L$ , tambien solidarios a la expansion (con longitud fisica  $aL$ ):

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_k \delta\phi_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (110)$$

Donde  $\mathbf{x}$  esta relacionado con la posicion por  $\mathbf{r}$  como  $r = a(t)x$ , asi, el numero de onda fisico es  $k/a$ . Los valores posibles para  $\mathbf{k}$  forman una red cubica, con espacios:

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad (111)$$

Es claro que realizando la expansion en una caja impone una periodicidad artificial, pero no importara al considerar una caja mucho mas grande que cualquier escala de interes.

El inverso del numero de onda  $a/k$  define una distancia que va junto con la expansion que sera especificada por su valor actual  $1/k$ . Una escala se dice que esta dentro del horizonte si  $aH/k$  es menor que 1, y fuera del horizonte si es mayor. Las escalas de interes dejan el horizonte en cierta epoca durante la inflacion, y vuelven a ingresar bien despues terminada la inflacion. Hay una fluctuacion de vacio para cada componente de Fourier de  $\delta\phi_k(t)$  que evoluciona de forma independiente de las otras. Unos  $e$ -folds o tiempos de Hubble despues de la salida del horizonte, estas pueden considerarse como una cantidad clasica, con un valor casi constante el cual llamaremos  $\delta\phi_k(t_*)$ . Luego de varios  $e$ -folds fuera del horizonte,  $\delta\phi_k$  habra tenido tiempo de cambiar significativamente, pero nos interesaremos solamente en su valor en un tiempo  $t_*$ , a unos pocos  $e$ -folds fuera del horizonte. La razon es que la perturbacion en curvatura, la cual es la mas importante, habra de permanecer con un valor constante en ese entonces.

### 0.5.4. Evolucion lineal de perturbaciones cosmologicas.

La perturbacion  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  no es la unica partida desde la homogeneidad e isotropia. Esta lleva a una perturbacion en la densidad de energia  $\delta\rho(\mathbf{x}, t)$  por tanto en la metrica del espacio-tiempo y luego de la inflacion, cuando el campo escalar decae en materia, habran perturbaciones heredadas  $\delta\rho_i(\mathbf{x}, t)$  en las densidades para cada especie de particulas. Habran perturbaciones mas complejas como la perturbacion  $\Theta(t, x, \mathbf{n})$  en la funcion que especifica el numero de fotones en posicion  $\mathbf{x}$  con momento segun  $\mathbf{n}$ . En nuestra posicion y en el presente esto corresponde a la anisotropia en la radiacion cosmica de fondo.

Todas las perturbaciones son determinadas por  $\delta\phi_k(t_*)$ . Consideremos una perturbacion generica  $g(\mathbf{x}, t)$  (en el caso de  $\Theta$ , fijaremos un  $\mathbf{n}$ ) y hagamos su expansion en Fourier

$$g(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (112)$$

Mientras estas sean pequeñas, la dependencia en el tiempo de las perturbaciones para un  $\mathbf{k}$  dado viene dada por un conjunto de ecuaciones diferenciales, que no



están acopladas para diferentes valores de  $\mathbf{k}$ . Para un  $\mathbf{k}$ -modo dado de cualquier cantidad, la solución de estas ecuaciones está determinada por  $\delta\phi_{\mathbf{k}}(t_*)$ , y como las ecuaciones son lineales, la solución es de la forma

$$g_{\mathbf{k}}(t) = T_g(t, k)\delta\phi_{\mathbf{k}}(t_*) \quad (113)$$

La función  $T_g(t, k)$  es la **función de transferencia**<sup>9</sup> o **transfer function**. Esta función es fijada por el modelo cosmológico en consideración, en nuestro caso debemos especificar  $H_0$  y  $\Omega_b$ . Notar que  $T_g$  es independiente de la dirección de  $\mathbf{k}$  debido a que las ecuaciones de evolución son invariantes bajo rotaciones.

### 0.5.5. Entrando al horizonte y la perturbación de curvatura $R$

La magnitud y la naturaleza de la fluctuación de vacío en la época  $t_*$  pueden ser calculadas dado un modelo inflacionario. Para confrontar los cálculos con las observaciones, necesitamos una apropiada función de transferencia evaluada en la presente época.

Como hacemos entonces para cubrir el salto entre la inflación y el presente?

Usualmente, la teoría cosmológica de perturbaciones empieza en cierta época, tomada en algún momento antes de la época cuando las escalas de interés empiezan a entrar al horizonte. Esta época inicial es bastante después de la nucleosíntesis, lo que significa que sabemos el contenido de materia en el Universo, excepto por la materia oscura no bariónica. Asumiendo que esta última es fría, tenemos fotones, neutrinos sin masa, materia ordinaria y materia oscura fría. Queremos saber cómo calcular estas funciones de transferencia, las cuales determinan estas perturbaciones iniciales en densidad a partir de la fluctuación de vacío  $\delta\phi_{\mathbf{k}}(t_*)$ . Podemos **solo** especular lo que ocurre entre  $t_*$  y la época inicial, pero resulta que **si** podemos calcular las funciones de transferencia que precisamos. La razón es que, en escalas por afuera del horizonte, cada región evoluciona esencialmente sin perturbación alguna de forma independiente, sin interacción causal con otras regiones. Es más, en virtud de asumir (3), los Universos separados (regiones sin contacto causal) son idénticos, con una convención para sincronizar sus relojes.

Vamos a referirnos como  $\rho_\gamma, \rho_\nu, \rho_b$  y  $\rho_c$  como las densidades de energía para las cuatro especies. En vez de considerar la densidad, será mejor trabajar con el **contraste en densidad**  $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ . En la época inicial encontramos que el contraste en densidad individual y el total están relacionados de la siguiente forma:

$$\frac{1}{3}\delta_{\mathbf{k}b} = \frac{1}{3}\delta_{\mathbf{k}c} = \frac{1}{4}\delta_{\mathbf{k}\gamma} = \frac{1}{4}\delta_{\mathbf{k}\nu} (= \frac{1}{4}\delta_{\mathbf{k}}) \quad (114)$$

Esta relación entre los contrastes en densidad para las cuatro especies es llamada la **condición adiabática**. Es posible derivar esta condición pero no nos ocuparemos de esto. La relación con el contraste total en densidad  $\delta_{\mathbf{k}}$  viene del hecho de que en la época inicial es en la época dominada por la radiación.

Un conjunto de contrastes en densidad que satisfacen la condición adiabática es llamado una **perturbación adiabática de densidad**. Se puede probar, si da el tiempo, que fluctuaciones en el campo escalar generan una perturbación

<sup>9</sup>Dependiendo del contexto, varios prefactores son sacados antes de definir la función de transferencia, usualmente es definida para que se acerque a 1 a grandes escalas.

adiabatica de densidad. El conjunto mas general de perturbaciones de densidad es una combinacion lineal de una perturbacion adiabatica de densidad y una **perturbacion de isocurvatura de densidad**, la cual es definida como un conjunto de perturbaciones en densidad individuales que suman para dar  $\delta\rho = 0$ . En este modelo simple que consideramos, se asume que una perturbacion de isocurvatura de densidad no se presenta.

Lo que falta es especificar la funcion de transferencia relacionando el valor inicial de  $\delta$  con el vacio  $\delta\phi_{\mathbf{k}}(t_*)$ . Ahora introducimos una perturbacion crucial, la cual nos referimos como  $\mathcal{R}(\mathbf{x},t)$  y llamamos **perturbacion de curvatura**. No veremos su definicion formal. La perturbacion de curvatura es una cantidad mas util que la perturbacion del campo escalar debido a que la primera es constante fuera del horizonte cuando la ultima no lo es. Ademas se mantiene definida luego de que el campo decae y  $\delta\phi_k$  deja de existir. Sera util considerar que las funciones de transferencia como siendo definidas en terminos de  $\mathcal{R}_k$ , entonces, una perturbacion generica  $g_k(t)$  esta dada en terminos de la perturbacion de curvatura primordial como

$$g_k(t) = T_g(t, k)\mathcal{R}_k \quad (115)$$

### 0.5.6. Anisotropias en CMD a grandes angulos

A partir de las condiciones iniciales, podemos calcular cantidades observables en el presente. La prediccion mas facil es para la anisotropia de la radiacion cosmica de fondo observada por el COBE. La resolucion del satelite COBE es de unos pocos grados, lo que corresponde a escalas bien por fuera del horizonte al momento del la ultima dispersion, o last scattering. Es tales escalas los procesos causales no han tenido tiempo de operar, y una buena aproximacion para la anisotropia viene dada por la importante formula

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{r}\mathcal{R}(\mathbf{x}_{ls}) \quad (116)$$

en donde  $\mathcal{R}_k$  es la perturbacion primordial en curvatura y el sufixo ls es para last scattering, donde  $\mathbf{x}_{ls} = 2H_0^{-1}\mathbf{e}$  y  $\mathbf{e}$  es un vector unitario en la direccion de observacion. Esto es llamado el efecto **Sachs-Wolfe**(Sachs and Wolfe 1967). Usualmente se presenta en terminos de una perturbacion en el potencial gravitacional, el cual en el epoca cuando dominaba la radiacion esta dado por  $\Phi_k = -3\mathcal{R}_k/5$ , llevando a

$$\frac{\delta T(\mathbf{e})}{T} = \frac{1}{3}\Phi(\mathbf{x}_{ls}) \quad (117)$$

### 0.5.7. Anisotropias en CMB a gran escala y formacion de estructuras.

En pequeñas escalas, tenemos que considerar los efectos causales que operan al ingreso del horizonte. Hay una competencia entre la gravedad, la cual trata de elevar el contraste en densidad atrayendo mas materia a las regiones mas densas y las particulas con movimiento aleatorio

Para los **neutrinos sin masa** el movimiento gana, y su contraste en densidad cae exponencialmente. Para la materia oscura fria, el movimiento aleatorio es despreciable y su contraste de densidad aumenta. Este crecimiento es logaritmico durante la epoca dominada por la radiacion, pero proporcional a  $a(t)$  luego

de que domine la materia.

Para **bariones** y **fotones** la historia es un poco mas complicada. Para los bariones en nuestro contexto, nos referimos a nucleos y electrones, debido a que Coulomb nos asegura que los numeros de densidad de protones y electrones son practicamente iguales en cada punto del espacio. Antes del desacoplamiento de los fotones, hay electrones libres y nucleos, con frecuentes dispersiones de Thomson (*Thomson scattering*) entre electrones y fotones. Debido a la presion, el contraste de densidad de este fluido acoplado de bariones y fotones oscila como una onda **acustica** estacionaria luego del ingreso en el horizonte.

Al desacoplarse, los electrones se unen a los atomos y cesa la dispersion de Thomson, terminando asi la presion. La oscilacion acustica termina y los fotones viajan libremente para convertirse en la radiacion cosmica de fondo. Como funcion de una escala angular, anisotropia de la radiacion cosmica de fondo presenta una serie de picos y valles, usualmente llamada picos acusticos o de Doppler, la cual presenta un retrato de las oscilaciones acusticas justo antes de su final.

Luego del desacople, los bariones caen en los pozos de potencial creados previamente por la materia oscura fria, adquiriendo el mismo contraste de densidad. Por ultimo, la perturbacion en densidad en una escala dada podra evolucionar mas alla del regimen lineal, y las estructuras del correspondiente tamaño se vuelven ligadas gravitacionalmente.

## 0.6. Algunos valores del WMAP

▪

Constante de Hubble:  $H_0 = 71 \pm 4 \text{Kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$  ( $h = 0,71 \pm 0,04$ )

▪

La edad del Universo:  $(13,7 \pm 0,2) \times 10^9$  años

▪

Constante cosmologica:  $\Omega_\Lambda = 0,73 \pm 0,04$

▪

$\Omega_B h^2 = 0,0224 \pm 0,0009$ ,  $\Omega_m h^2 = 0,135 \pm 0,0009$

▪ Tiempo de desacoplamiento: 379000 años luego del Big Bang

▪ Las primeras estrellas se formaron unos 200 millones de años luego del Big Bang

## .1. Ideas sobre Relatividad General